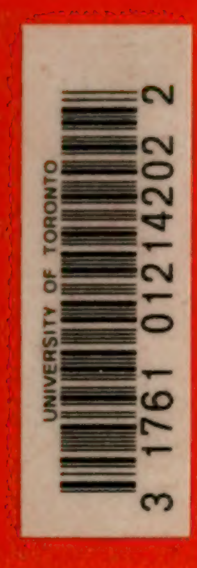
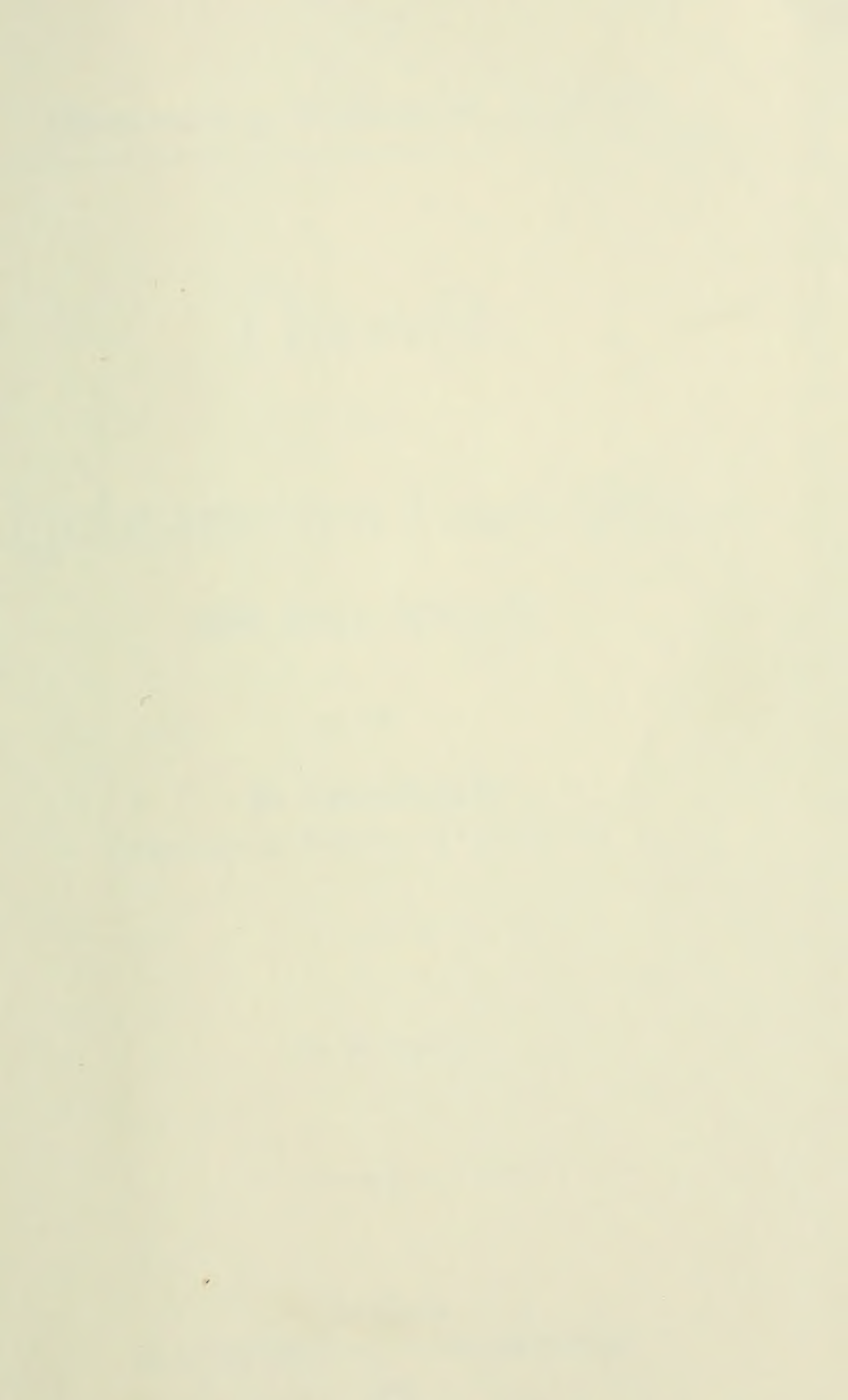

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01214202 2

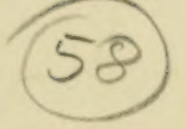












Sammlung Schubert XXXI

Theorie

der

algebraischen Funktionen

und ihrer Integrale

von

E. Landfriedt

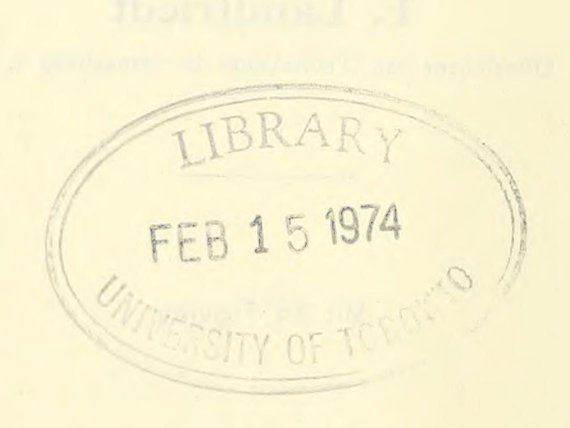
Oberlehrer am Technikum in Strassburg i. E.

Mit 36 Figuren

Leipzig

G. J. Göschensche Verlagshandlung

1902


LIBRARY
FEB 15 1974
UNIVERSITY OF TORONTO

Druckfehlerverzeichnis

zu Sammlung Schubert XXXI: Landfriedt, Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale.

Seite 4, Zeile 1 von unten ist zu lesen: $\varkappa$ statt k.
„ 7, „ 1 von unten ist zu lesen: $s'^{n-\mu}$ statt $s^{n-\mu}$.
„ 8, „ 9 von oben ist zu lesen: δf_μ statt $\delta f \mu$.
„ 8, „ 1 von unten ist zu lesen:

$$k_\mu = n \cdot \left(\frac{2}{\sigma}\right)^n \cdot (\varkappa \cdot N)^{n-\mu} \cdot n_\mu (N^\mu - M^\mu)$$

statt

$$k_\mu = n \cdot \left(\frac{2}{\sigma}\right) \cdot (\varkappa \cdot N)^{n-\mu} \cdot n_\mu \cdot (N^\mu - N^\mu).$$

Seite 9, Zeile 5 von oben lies:

$$\varkappa = \frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1} \quad \text{statt} \quad \varkappa = \frac{1}{\sqrt[n]{2 - 1}}.$$

„ 10, Zeile 11 von oben lies: ϱ_q statt ϱ_2.
„ 12, Fig. 3 lies: $s = 0$ statt $s = a$.
„ 13, Zeile 3 von oben lies: r_μ statt p_μ.
„ 17, „ 2 von unten lies: Sind statt Stnd.
„ 21, „ 20 von oben lies: $z = a$ statt $c = a$.
„ 21, „ 30 von oben lies: $z = a$ statt $z = \alpha$.
„ 25, „ 1 von unten soll es heißen: und s_2 „ — statt und s_2 „ $=$.
„ 28, Zeile 3 von oben lies: αs_2 statt α_2.
„ 28, „ 4 von unten hat p vor dem Worte „sind“ wegzufallen.
„ 30, Zeile 4 von oben lies:

$$s_3' = \frac{\alpha^2}{s_1} = \ldots \quad \text{statt} \quad s_3 = \frac{\alpha^2}{s_1} = \ldots$$

„ 31, Zeile 5 von unten lies: $s^{n-2}, s^{n-3}, \ldots, s, s^0$ statt $s^{n-2}, s^{n-3}, - s, s^0$.
„ 40, Zeile 6 von unten lies: ϱ statt n.
„ 40, „ 8 von unten lies: ϱ statt n.
„ 45, „ 18 von oben lies: s' statt s.

Seite 46, Zeile 15 von oben soll es heißen: nun in 2^0_b) statt nun 2^0_b).

„ 47, Zeile 21 von oben lies: OG statt $0G$.

„ 47, „ 29 von oben fehlt vor $\mu_1 g_1 + f_1 = \ldots$ die Formelnummer 3^0).

„ 53, Zeile 8 von oben lies: $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -3$ statt $\sigma = 0$, $0_1 = 3$.

„ 54, Zeile 8 von unten lies: $i, -1$ statt $i_1 - 1$.

„ 56, „ 1 von oben soll es heißen: $z = 0$ statt $z \equiv 0$.

„ 61, „ 7 von oben soll es heißen: funktionen-theoretischer statt funktionen-theoetischer.

„ 64, Zeile 1 von unten soll es heißen: $-A_3$ statt $+A_3$.

„ 69, „ 19 von oben lies: $s_{i_n}(\beta)$ statt $s_{in}(\beta)$.

„ 84, „ 6 von oben lies: Funktionen statt Funktion.

„ 84, „ 20 von oben lies: wo t einen statt wo einen.

„ 89, „ 1 von oben lies: $\mu \cdot |\tau|_{\frac{1}{z-\alpha}}$ statt $|\tau|_{\frac{1}{z-\alpha}}$.

„ 93, „ 1 von oben ist vor $\varkappa, \lambda, \nu$ das Wort „von“ wegzulassen.

„ 101, Zeile 17 von oben lies: irreducibele statt irreducibelen.

„ 102, Zeile 13 von oben lies: § 11 statt § 10.

„ 103, „ 13 von oben lies: im Folgenden auch dann statt im Folgenden dann.

„ 108, Zeile 13 von oben lies: Satz III^0) 2^0) statt Satz 3^0) 2^0).

„ 109, Zeile 10 von unten lies: zusammenhängenden statt zusammenhängende.

„ 111, Zeile 11 von oben lies: ν statt n.

„ 116, „ 10 von oben lies: $z = a\alpha^2$ statt $r = a \cdot \alpha^2$.

„ 120, „ 5 von oben lies: $-$Rand von b_1 mit dem $-$Rand von b_2 statt $-$Rand von b_1 mit dem $+$Rand von b_2.

„ 126, Zeile 22 von oben lies: Diese Zahl statt Die Zahl.

„ 133, „ 7 von oben lies: konstanten statt konstante.

„ 134, „ 3 von oben lies: $\int \left| \begin{matrix} a \\ l \\ a_0 \end{matrix} \right| \tau\, dz$ statt $\int \left| \begin{matrix} a \\ e \\ a_0 \end{matrix} \right| \tau\, dz$.

„ 136, „ 14 von oben lies: T' statt T.

„ 147, „ 10 von unten lies: Λ_ν statt Λ_r.

„ 153, „ 1 von oben lies: $\Delta_{\varkappa\lambda}$ statt $\Delta_{\varkappa\gamma}$.

Seite 169, Zeile 4 von oben lies: $a_1 \ldots a_p$ statt $\mu_1 \ldots \mu_p$.
„ 169, Formel 5⁰) lies: $A_{\varrho\mu}$ statt $A_{\rho\lambda}$.
„ 173, „ I⁰) lies: $\tau_\varkappa$ statt $t_\varkappa$.
„ 179, Zeile 10 von oben lies: 0^1 statt $0'$.
„ 181, „ 1 von oben lies: $q_{\nu\beta}$ statt q_β.
„ 181, „ 5 von oben lies:

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} \Gamma_\nu \cdot \Phi_\nu \sum_{\beta=\mu+1}^{\nu} \Phi_\beta \ldots \quad \text{statt} \quad \sum_{\nu=1}^{\mu} \Gamma_\nu \cdot \Phi_\nu \cdot \sum_{\beta=\mu+1}^{\nu} \Phi_\beta \ldots$$

„ 188, Zeile 9 von oben lies:

$$\frac{dP(\varepsilon, E)}{d\zeta} \quad \text{statt} \quad \frac{dP(\varepsilon, E)}{dz}.$$

„ 192, Zeile 5 von unten lies: T'' statt T'.
„ 197 ist die erste Zeile: Dies gibt den wegzulassen.
„ 199, Zeile 2 von oben lies: logarithmische statt gloarithmische.
„ 199, Formel 4⁰) lies: $u_2'(\gamma_1)$ statt $u_2(\gamma_1)$.
„ 201, Zeile 5 von oben lies: $t(o, \gamma_1)$ statt $t(o, \gamma_\nu)$.
„ 201, „ 1 von unten lies: $t(o, \gamma_\lambda)$ statt $t(o \cdot \gamma_\lambda)$.
„ 202, Formel II⁰) lies: $\tilde{\omega}(\varepsilon_\varkappa, \varepsilon_q)$ statt $\tilde{\omega}(\varepsilon_\varkappa\, \varepsilon_q)$.
„ 206, Zeile 10 von oben lies: r_r statt r_μ.
„ 208, „ 8 von oben lies: n_r statt n_μ.
„ 209, Fig. 36 lies: $l_\varkappa$ statt l_k und $\beta_\varkappa$ statt β_k.
„ 210, Formel 7⁰) lies überall: c_ν statt c.
„ 212, Zeile 5 von oben lies: $\sum_{\lambda=1}^{\mu}$ statt $\sum_{\lambda=1}^{r}$.
„ 223, „ 6 von unten lies: $\Psi^{(n_\varrho - 1)}(\gamma_\varrho, \varepsilon)$ statt $\Psi^{n_\varrho - 1}(\gamma_\varrho, \varepsilon)$.
„ 223, Zeile 3 von unten lies: $R_\varrho^{(n_\varrho)}$ statt $R_\varrho^{(n)}$.
„ 224, „ 5 von unten lies: γ_r statt γ_2.
„ 224, „ 1 von unten lies: $\varrho = 1, 2, \ldots r$ statt $\varrho = 1, 2, \ldots \varrho$.
„ 225, Zeile 2 von oben lies: in der Umgebung von γ_ϱ statt in der Umgebung γ_ϱ.
„ 226, Zeile 2 von oben lies: $\frac{R_\varrho^{(3)}}{2!}$ statt $\frac{R_\varrho^{(2)}}{2!}$.
„ 226, „ 4 von oben lies:

$$\frac{1}{\pi i} \sum_{\lambda=1}^{p} \left[A_\lambda(o) \cdot \sum_{\varrho} \{ \ldots \} \right] \quad \text{statt} \quad \frac{1}{\pi i} \sum_{\lambda=1}^{p} A_\lambda(o) \cdot \left[\sum_{\varrho} \{ \ldots \} \right].$$

Seite 226, Formel III^0) lies: $\frac{R_\varrho^{(n_\varrho)}}{(n_\varrho - 1)!}$ statt $\frac{R_\varrho^{(n_\varrho)}}{(n_\varrho + 1)!}$.

„ 227, Zeile 5 von unten lies:

$$\sum_\sigma \frac{R_\varrho^{(\sigma)}}{(z - \zeta_\varrho)^\sigma} \quad \text{statt} \quad \sum \frac{R_\varrho^{(\sigma)}}{(z - \zeta_\varrho)^{n_\varrho}}.$$

„ 227, Zeile 2 von unten lies: $\sum_{\varrho=1}^{r}$ statt $\sum_{\varrho=1}$.

„ 229, Formel IV^0_a.) lies: $\frac{dt^{(1)}(o, \gamma_\varrho)}{dz}$ statt $\frac{dt^{(1)}_{(o, \gamma_\varrho)}}{dz}$.

„ 230, Zeile 16 von oben lies: Nullpunkten statt Nullpunkte.

„ 230, Zeile 18 von oben lies: jeden statt jedem.

„ 235, Formel 7^0) links lies: $u_\lambda^{(\nu_\alpha)}(\gamma_{\nu_\alpha})$ statt $u^{(\nu_\alpha)}(\gamma_{\nu_\alpha})$.

„ 235, Zeile 7 von unten lies:

$$u_\lambda^{(\nu_\varkappa + \beta)}(\gamma_{\pi_\beta}) \quad \text{statt} \quad u_\lambda^{(\nu_\varkappa + \beta)}(\gamma_{\pi_q}).$$

„ 238, Zeile 5 von oben lies: Formel III^0) statt Satz III^0).

„ 240, „ 15 von oben lies: τ_1 statt τ_2.

„ 240, „ 9 von unten lies:

$$t^{(\nu_\alpha)}(o, \gamma_{\nu_\alpha}) \quad \text{statt} \quad t^{(\nu_\alpha)}(o, \gamma_{\nu_\varkappa}).$$

„ 241, Zeile 1 von unten lies: $\sum_{\lambda=1}^{\varkappa}$ statt $\sum_{\lambda}^{\varkappa}$.

„ 250, „ 19 von oben lies: $\varepsilon_{q'}$ statt ε_{q_1}.

„ 250, „ 22 von oben lies: $\varepsilon_{q'}$ statt ε_{q_1}.

„ 251, „ 24 von oben lies: Unbekannte statt Unbekannt.

„ 254, Formel 6^0) lies: A_σ statt A'_σ.

„ 262, „ 1^0) muß das letzte Glied heißen:

$$2z(z^2 + z + 1)^2 \quad \text{statt} \quad -2z(z^2 + z + 1)$$

„ 283, Zeile 7 von unten lies:

$$S \cdot \varphi_3(\sigma_1, \zeta_1) \quad \text{statt} \quad S \cdot \varphi_2(\sigma_1, \zeta_1).$$

„ 287 in der Anmerkung muß es heißen: T. II statt T. III.

„ 293, Formel 7^0) soll es heißen:

$$\sigma^2 = \zeta(\zeta - 1)(\zeta - \beta_3)(\zeta - \beta_1) \ldots (\zeta - \beta_{2p-1})$$

statt $\sigma^2 = \zeta(\zeta - 1)(\zeta - \beta_3)(\zeta - \beta_3) \ldots (\zeta - \beta_{2p-1})$.

Inhaltsverzeichnis.

Kapitel I: **Die algebraische Grundgleichung** $F\binom{n\ m}{s,\ z} = 0$.

Kapitel II: **Die Riemann'sche Verzweigungsfläche** T.

Kapitel III: **Die Integrale der Klasse.**

Kapitel I.

Die algebraische Grundgleichung $F(\overset{n}{s},\overset{m}{z})=0$.

§ 1. Allgemeines.

Eine Funktion $f(z)$ der komplexen Variabelen z heifst einwertig, wenn jedem bestimmten Werte a von z ein und nur ein Wert $f(a)$ von $f(z)$ entspricht. Eine einwertige Funktion $f(z)$ von z nimmt also in einem bestimmten Punkte $z = a$ der komplexen Zahlenebene stets denselben Wert an, welches auch der Weg sei, auf dem z den Wert a erreicht. Funktionen dieser Art heifsen eindeutig. Einwertige Funktionen sind auch eindeutig.

Denkt man sich die Werte der einwertigen Funktion $f(z)$ tabellarisch in einer f-Ebene eingetragen, so dafs jedem Werte von $f(z)$ ein bestimmter Punkt der f-Ebene entspricht, so wird, wenn z in der Ebene der komplexen Zahlen einen geschlossenen Weg durchläuft, auch $f(z)$ in der f-Ebene einen geschlossenen Weg durchlaufen, wenn nicht z durch einen Punkt geht, dem ein Pol von $f(z)$ entspricht.

Die einfachsten einwertigen Funktionen sind die rationalen Funktionen. — Eine Funktion $f(z)$ der komplexen Variabelen z heifst mehrwertig, wenn im allgemeinen jedem bestimmten Werte a von z mehrere von einander verschiedene Werte von $f(z)$ entsprechen. Dabei ist nicht ausgeschlossen, dafs für gewisse Werte von z mehrere der sonst verschiedenen Funktionswerte einander gleich werden.

Zu den einfachsten mehrwertigen Funktionen gehören die irrationalen algebraischen Funktionen, auch kurz algebraische Funktionen genannt.

Bezeichnet f_1 einen der verschiedenen Werte, die $f(z)$ in einem bestimmten Punkte z annimmt, so wird, wenn z

von diesem Punkte aus in der komplexen Zahlenebene eine stetige Aufeinanderfolge von Werten durchläuft, f_1 sich ebenfalls ändern und eine Reihe von Werten durchlaufen; das Aggregat dieser Wertänderungen heifst ein Zweig der Funktion $f(z)$.

Erreicht z, wenn es in der komplexen Zahlenebene einen Weg l durchläuft, einen Punkt $z = \alpha$, in dem k der sonst verschiedenen Werte von $f(z)$ einander gleich werden, so treffen in dem zugehörigen Punkte der f-Ebene k Zweige $f_1 \dots f_k$ von $f(z)$ zusammen. Geht dann z vom Punkte $z = \alpha$ aus weiter, so trennen sich in der f-Ebene diese k Zweige wieder, es bleibt aber im allgemeinen unentschieden, welcher von den Zweigen $f_1' \dots f_k'$ (Fig. 1) die Fortsetzung eines bestimmten Zweiges f_ν aus der Reihe $f_1 \dots f_k$ sei. Einen solchen Punkt $z = \alpha$ nennen wir einen singulären (oder kritischen) Punkt von $f(z)$. Durchläuft z einen geschlossenen Weg, der einen singulären Punkt umschliefst, in dem k Zweige $f_1 \dots f_k$ von $f(z)$ zusammentreffen, so beschreiben $f_1 \dots f_k$ nicht notwendig ebenfalls geschlossene Wege in der f-Ebene; mit anderen Worten: ein solcher Weg von z führt $f(z)$ nicht notwendigerweise zu seinem Anfangswerte zurück. Funktionen, die diese Eigentümlichkeit aufweisen, nennen wir mehrdeutig. Mehrwertige Funktionen sind auch mehrdeutig.

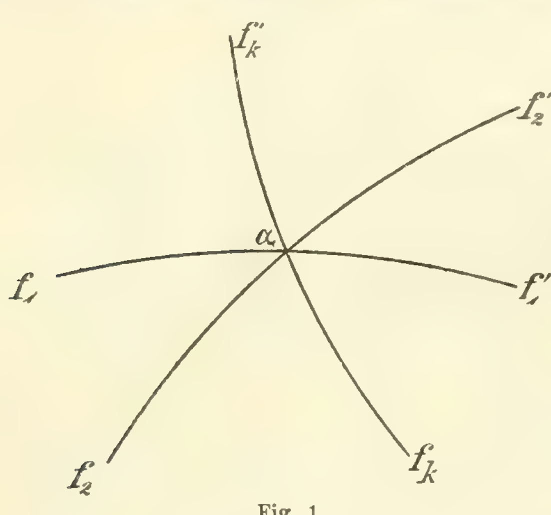


Fig. 1.

Bei unseren späteren Betrachtungen über algebraische Funktionen wird es eine unserer Hauptaufgaben sein, die Anzahl und Lage der singulären Punkte zu bestimmen. Es wird sich dabei, beiläufig gesagt, herausstellen, dafs die Mehrdeutigkeit der algebraischen Funktionen ausschliefslich auf dem Auftreten solcher singulären Punkte beruht.

§ 2. Die algebraischen Funktionen: Definition und Grundeigenschaften.

Definition: Eine Gröfse s heifst algebraische Funktion der komplexen Variabelen z, wenn sie mit z verbunden ist durch eine Gleichung von der Form:

$$\text{I}^0) \qquad F\binom{n\ m}{s,z} = \varphi_0 \cdot s^n + \varphi_1 \cdot s^{n-1} + \ldots + \varphi_n = 0,$$

worin die Koeffizienten $\varphi_0, \ldots \varphi_n$ ganze rationale Funktionen von z sind, von denen mindestens eine bis zum Grade m in z ansteigt.

Die durch die Grundgleichung I⁰) definierte algebraische Funktion s von z ist n-wertig; jedem Werte a von z entsprechen n im allgemeinen verschiedene Werte:

$$s_1(a),\ s_2(a), \ldots, s_n(a)$$

von s, nämlich die n Wurzeln der Gleichung:

$$F\binom{n\ m}{s,a} = \varphi_0(a) \cdot s^n + \varphi_1(a) \cdot s^{n-1} + \ldots + \varphi_n(a) = 0.$$

Schreibt man für das beliebige a wieder z, so sind die n Wurzeln

$$s_1(z), \ldots, s_n(z)$$

die n Zweige der durch die Grundgleichung I⁰) definierten Funktion $s(z)$. Die Untersuchung der Eigenschaften dieser n Zweigfunktionen bildet die Grundlage der im Folgenden zu entwickelnden Theorie.

Wir betrachten die Wurzeln $s_1 \ldots s_n$ zunächst in ihrer Abhängigkeit von den Koeffizienten der Grundgleichung I⁰) und schreiben zu dem Zweck diese Gleichung in der Form:

$$\text{II}^0 \qquad s^n + f_1 \cdot s^{n-1} + . + f_\mu s^{n-\mu} + \ldots + f_n = 0,$$

wo
$$f_\mu(z) = \frac{\varphi_\mu(z)}{\varphi_0(z)} \quad \text{ist, für } \mu = 1, 2 \ldots n.$$

Es gelten folgende Sätze:

Satz I⁰) Sind alle Wurzeln $s_1, \ldots s_n$ endlich, so sind es auch alle Koeffizienten $f_1, \ldots f_n$.

Beweis: Aus der Elementaralgebra weiſs man, daſs

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n = -f_1,$$
$$s_1\, s_2 + s_1\, s_3 + \dots + s_{n-1}\, s_n = +f_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$s_1\, s_2 \dots s_n = (-1)^n . f_n$$

ist, woraus sich unmittelbar die Richtigkeit des Satzes ergiebt.

Satz II°) Sind $f_1, \dots f_n$ endlich, so sind es auch alle Wurzeln $s_1, \dots s_n$.

Beweis: Sind $f_1, \dots f_n$ endlich, so läſst sich stets eine positive endliche Gröſse M so bestimmen, daſs
$\mod f_1 < n.M$, $\mod f_2 < n_2.M^2, \dots \mod f_\mu < n_\mu M^\mu, \dots \mod f_n < M^n$,
oder

$$M > \frac{\mod f_1}{n}, \dots, M > \sqrt[\mu]{\frac{\mod f_\mu}{n_\mu}}, \dots M > \sqrt[n]{\mod f_n}$$

ist, worin n_μ den Binominalkoffizienten

$$\frac{n\,(n-1)\dots(n-\mu+1)}{1\,.\,2\dots\mu}$$

bezeichnet. Aus

$$s^n = -f_1 . s^{n-1} - f_2 . s^{n-2} - \dots - f_n$$

folgt nun, wenn allgemein $\mod r = |\, r\,|$ ist:

$$|s|^n < |s|^{n-1} . |f_1| + |s|^{n-2} . |f_2| + \dots + |f_n|.$$

Es ist daher

$$|s|^n < n\,.\,M\,.\,|s|^{n-1} + n_2\, M^2\,.\,|s|^{n-2} + \dots + M^n,$$

oder

$$2\,|s|^n < |s|^n + n\,.\,M\,.\,|s|^{n-1} + \dots + M^n,$$

d. h.

$$2\,|s|^n < (|s| + M)^n$$

und schlieſslich

$$|s| < k\,.\,M, \text{ wo } k = \frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1} \text{ ist.*)}$$

---

*) Diese Eingrenzung der Wurzeln rührt von Christoffel her. Eine andere Eingrenzung giebt Gauſs in seinem letzten Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Satz III⁰) Es giebt Werte von z, für die mindestens eine der Wurzeln $s_1 \dots s_n$ unendlich wird.

Beweis: Als einwertige, rationale Funktion von z mufs $f_1(z)$ mindestens für einen Wert von z unendlich werden; gemäfs der Beziehung

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n = -f_1,$$

mufs für ein solches z auch mindestens eine der Wurzeln $s_1 \dots s_n$ unendlich werden.

Satz IV⁰) Wird eine Wurzel s_u unendlich, so wird es auch mindestens einer der Koeffizienten.

Beweis: Würde keiner der Koeffizienten $f_1 \dots f_n$ unendlich, wenn $s_u = \infty$ wird, so müssten nach Satz II⁰) alle Wurzeln $s_1 \dots s_n$, also auch s_u endlich sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Folgerung: Von den Wurzeln $s_1 \dots s_n$ werden eine oder mehrere immer und nur in den Punkten der z-Ebene unendlich, in denen einer der Koeffizienten unendlich wird. — Eine algebraische Funktion von z wird also nur in einer endlichen Anzahl von Punkten unendlich.

Angenommen, s werde ∞ für $z = \alpha$; dann mufs nach Satz IV⁰) mindestens ein Koeffizient f für $z = \alpha$ unendlich werden. Ist $\nu - 1$ die höchste Ordnung, zu der diese Koeffizienten für $z = \alpha$ unendlich werden, so ist jedenfalls

$$(z - \alpha)^\nu \cdot f_\mu = 0 \text{ für } z = \alpha \,.\, (\mu = 1, 2 \dots n).$$

Führt man nun in die Gleichung

$$s^n + f_1 \cdot s^{n-1} + \dots + f_n = 0$$

an Stelle von s eine neue Funktion S ein mit Hilfe der Substitution

$$s = \frac{S}{(z - \alpha)^\nu},$$

so geht diese Gleichung über in die Gleichung:

$$S^n + (z - \alpha)^\nu \cdot f_1 \cdot S^{n-1} + (z - \alpha)^{2\nu} \cdot f_2 \cdot S^{n-2} + \dots \\ + (z - \alpha)^{\nu n} \cdot f_n = 0,$$

die sich für $z = \alpha$ auf

$$S^n = 0, \text{ oder } S = 0$$

reduziert. Für $z = \alpha$ verschwindet also das Produkt $s.(z - \alpha)^\nu$, d. h. s kann für $z = \alpha$ höchstens $= \infty^{\nu - 1}$ werden, also jedenfalls ∞ nur zu einer endlichen Ordnung.

Wird $s = \infty$ für $z = \infty$, so führt man an Stelle von z die neue Variabele z' ein mit Hilfe der Substitution $z = \frac{1}{z'}$. Die Koeffizienten f sind dann rationale Funktionen von z', und es lassen sich $z' = 0$ dieselben Betrachtungen wiederholen, wie vorhin für $z = \alpha$. Auch für $z = \infty$ kann s nicht zu unendlich hoher Ordnung ∞ werden. — Wir haben daher den

Satz V⁰.) Eine algebraische Funktion kann nur zu endlicher Ordnung unendlich werden und nicht unendlich oft.

Wir untersuchen nun, wie die Wurzeln $s_1 \ldots s_n$ von II⁰.) sich ändern, wenn die Koeffizienten $f_1 \ldots f_n$ sich ändern.

In der z-Ebene nehmen wir einen Punkt $z = \alpha$, dem ein System endlicher Werte von $f_1 \ldots f_n$ entspricht. Die Gleichung II⁰.) habe für dieses Wertesystem der $f_1 \ldots f_n$ q $(< n)$ von einander verschiedene Wurzeln

$$s_1 \ldots s_q,$$

und zwar sei s_1 eine t-fache, s_2 eine u-fache, ... s_q eine v-fache Wurzel, so dafs die Gleichung II⁰.) sich für das betrachtete Koeffizientensystem in der Form

$$(s - s_1)^t \cdot (s - s_2)^u \ldots (s - s_q)^v = 0$$

anschreiben läfst, wo

$$t + u + \ldots + v = n \text{ ist.}$$

Für jede dieser q Wurzeln $s_1 \ldots s_q$ giebt es, nach Satz II⁰.), eine obere Grenze

$$\text{mod } s < \varkappa \, . \, M,$$

wo

$$\text{mod } f_\mu \overline{\gtrless} n_\mu \, . \, M^\mu$$

ist. — Repräsentiert man ferner die q Wurzeln $s_1 \ldots s_q$ in einer s-Ebene, so liefert das q verschiedene Punkte. Bezeichnet man mit σ die kleinste gegenseitige Entfernung zweier solcher Punkte, also den kleinsten der $\frac{1}{2} q (q-1)$ Modulen:

$$\begin{array}{l} \operatorname{mod}(s_1 - s_2), \ldots, \operatorname{mod}(s_1 - s_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad \operatorname{mod}(s_{q-1} - s_q), \end{array}$$

so ist $\sigma \neq 0$.

Durch Änderung von z erteilen wir jetzt den Koeffizienten $f_1 \ldots f_n$ endliche Vermehrungen $\delta f_1, \ldots \delta f_n$; bezeichnen dann $s_1', \ldots s_n'$ die Wurzeln der neuen Gleichung

$$s'^n + (f_1 + \delta f_1) \cdot s'^{n-1} + \ldots + (f_\mu + \delta f_\mu) \cdot s'^{n-\mu} + \ldots + (f_n + \delta f_n) = 0,$$

so ist, wenn wir zur Abkürzung

$$\delta f_1 \cdot s'^{n-1} + \ldots + \delta f_\mu \cdot s'^{n-\mu} + \ldots + \delta f_n = \varDelta$$

setzen:

$$(s' - s_1)^t (s' - s_2)^u \ldots (s' - s_q)^v = -\varDelta,$$

und daher

$$\operatorname{mod} \varDelta = \varrho_1^t \cdot \varrho_2^u \cdot \ldots \varrho_q^v$$

für jede Wurzel s', wenn allgemein $\operatorname{mod}(s' - s_\varkappa) = \varrho_\varkappa$ ist.

Die eben eingeführten Vermehrungen (Schwankungen) $\delta f_1 \ldots \delta f_n$ suchen wir nunmehr so einzuschränken, daſs wir eine obere Grenze für die Modulen ϱ angeben können. — Wir schränken $\delta f_1 \ldots \delta f_n$ ein mit Hilfe der Ungleichheit:

$$\text{a}^0) \qquad \operatorname{mod} \varDelta \overline{\overline{<}} \varepsilon \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n, \text{ wo } 0 < \varepsilon \overline{\overline{<}} 1 \text{ sei.}$$

Berücksichtigt man, daſs sich stets eine Gröſse N finden läſst, so daſs

$$\operatorname{mod}(f_\mu + \delta f_\mu) \overline{\overline{<}} n_\mu \cdot N^\mu$$

und

$$\operatorname{mod} s' < \varkappa \cdot N$$

ist, so ergiebt sich aus

$$\varDelta = \sum_{\mu=1}^{n} \delta f_\mu \cdot s^{n-\mu}$$

oder
$$\operatorname{mod} \Delta < \sum_{\mu=1}^{n} \operatorname{mod} \delta f_\mu . \operatorname{mod} s'^{n-\mu},$$

dafs die einschränkende Bedingung a.⁰) ganz sicher erfüllt ist, wenn wir verlangen:

a$_1$.⁰)
$$\sum_{\mu=1}^{n} \operatorname{mod} \delta f_\mu . (\varkappa N)^{n-\mu} \overline{\overline{<}} \varepsilon . \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n.$$

Diese Bedingung hinwieder ist erfüllt, wenn jeder der n Summanden links gleich oder kleiner als der n^{te} Teil der Gröfse rechts ist, d. h. wenn

a$_2$.⁰)
$$\operatorname{mod} \delta f_\mu \overline{\overline{<}} \frac{\varepsilon}{n} . \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n . \left(\frac{1}{\varkappa N}\right)^{n-\mu} \text{ ist, für } \mu = 1,2 \ldots n.$$

In dieser die Schwankungen $\delta f \mu$ einschränkenden Bedingung, deren Erfülltsein das Erfülltsein von a.⁰) nach sich zieht, ist N noch unbestimmt und nur an die Bedingung

$$\operatorname{mod} (f_\mu + \delta f_\mu) \overline{\overline{<}} n_\mu . N^\mu$$

gebunden. Beachtet man aber, dafs

$$\operatorname{mod} (f_\mu + \delta f_\mu) < \operatorname{mod} f_\mu + \operatorname{mod} \delta f_\mu,$$

und
$$\operatorname{mod} f_\mu \overline{\overline{<}} n_\mu . M^\mu,$$

so sieht man, dafs

$$\operatorname{mod} (f_\mu + \delta f_\mu) < n_\mu . M^\mu + \frac{\varepsilon}{n} . \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n . \left(\frac{1}{\varkappa N}\right)^{n-\mu}$$

ist, falls a$_2$.⁰) erfüllt. Die Gröfse N genügt daher der Bedingung

$$\operatorname{mod} (f_\mu + \delta f_\mu) \overline{\overline{<}} n_\mu N^\mu,$$

wenn
$$n_\mu . M^\mu + \frac{\varepsilon}{n} . \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n . \left(\frac{1}{\varkappa N}\right)^{n-\mu} \overline{\overline{<}} n_\mu . N^\mu$$

oder

b.⁰)
$$\varepsilon \overline{\overline{<}} k_\mu \qquad (\mu = 1, 2 \ldots n)$$

ist, für
$$k_\mu = n . \left(\frac{2}{\sigma}\right)^n . (\varkappa . N)^{n-\mu} . n_\mu (N^\mu - M^\mu).$$

Von den n Gröfsen k_μ ist jede gröfser als die nächstfolgende. Es ist nämlich zunächst, da $\varepsilon > 0$ sein soll, $N > M$, d. h. $\frac{M}{N} = \omega < 1$. Ferner ist:

$$\frac{k_{\mu+1}}{k_\mu} = \frac{n-\mu}{\varkappa} \cdot \frac{1}{\mu+1} \cdot \frac{1-\omega^{\mu+1}}{1-\omega^\mu}.$$

Da $\varkappa = \frac{1}{\sqrt[n]{2}-1} > n$ ist, so ist $\frac{n-\mu}{\varkappa} < 1$. Ebenso ist $\frac{1}{\mu+1} \cdot \frac{1-\omega^{\mu+1}}{1-\omega^\mu} < 1$, wie sich aus

$$\frac{1-\omega^{\mu+1}}{1-\omega^\mu} = \frac{1-\omega+\omega(1-\omega^\mu)}{1-\omega^\mu} = \frac{1}{1+\omega+\omega^2+\ldots+\omega^{\mu+1}} + \omega < 1+\omega < 2$$

ergiebt. Hieraus folgt $\frac{k_{\mu+1}}{k_\mu} < 1$. Von allen k_μ ist k_n am kleinsten. Die n Bedingungen b⁰) lassen sich also ersetzen durch die eine Bedingung:

c⁰) $$\varepsilon \overline{\overline{<}}\, n \cdot \left(\frac{2}{\sigma}\right)^n \cdot (N^n - M^n).$$

Soll hierin ε der Bedingung $0 < \varepsilon \overline{\overline{<}} 1$ gemäfs wirklich den Wert 1 erreichen können, so mufs

$$n \cdot \left(\frac{2}{\sigma}\right)^n \cdot (N^n - M^n) \overline{\overline{>}} 1$$

sein; sollen andererseits die Schwankungen δf_μ, die zufolge a₂⁰) mit wachsendem N sinken, nicht unnötig eingeschränkt werden, so mufs

$$n \cdot \left(\frac{2}{\sigma}\right)^n \cdot (N^n - M^n) = 1, \text{ oder } N = \sqrt[n]{M^n + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n}$$

genommen werden. — Rekapitulieren wir alles bisherige, so haben wir folgendes Resultat: Bestimmt man eine Zahl N mittels der Gleichung

A⁰) $$N = \sqrt[n]{M^n + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n}$$

und beschränkt man die Schwankungen δf_μ gemäfs den Beziehungen:

B⁰) $$\mod \delta f_\mu \overline{\overline{<}} \frac{\varepsilon}{n} \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{\varkappa N}\right)^{n-\mu}, \quad (\mu = 1, 2, \ldots n)$$

worin

C⁰) $$0 < \varepsilon \overline{\overline{<}} 1$$

ist, so hat man

D⁰) $$\left| \begin{array}{l} \mod \Delta = \varrho_1^t \cdot \varrho_2^u \ldots \varrho_q^v < \varepsilon \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n, \text{ und folglich auch} \\ \qquad \varrho_1^t \cdot \varrho_2^u \ldots \varrho_q^v < \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n. \end{array} \right.$$

Sind, was wir von nun an voraussetzen, die Schwankungen δf_μ so eingeschränkt, dafs die Ungleichheit D⁰) erfüllt ist, so mufs mindestens einer der Modulen $\varrho_1 \ldots \varrho_2$ kleiner als $\frac{\sigma}{2}$ sein. Angenommen, es sei $\varrho_1 < \frac{\sigma}{2}$; dann ist jeder andere Modul $\varrho_\nu (\nu = 2, 3 \ldots q)$ gröfser als $\frac{\sigma}{2}$, wie sich unmittelbar ergiebt, wenn man das in der s-Ebene liegende Dreieck mit den Seiten $\varrho_1, \varrho_\nu, \mod (s_1 - s_\nu)$ betrachtet (Fig. 2).

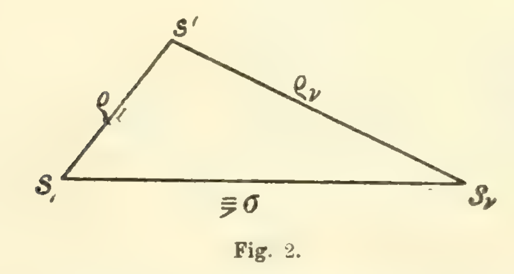


Fig. 2.

Hieraus ergeben sich obere Grenzen für $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_q$.

Ist z. B. $\varrho_1 < \frac{\sigma}{2}$, so ist $\varrho_2^u \ldots q_q^v > \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{u+\cdots+v}$,

oder $$\varrho_2^u \ldots \varrho_q^v > \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{n-t}.$$

Zusammen mit D⁰) liefert dies:

$$\varrho_1 < \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt[t]{\varepsilon}.$$

Wir können daher allgemein sagen:

$$\text{Ist } \varrho_1 < \frac{\sigma}{2}, \text{ so ist } \varrho_1 = \mathrm{mod}\,(s' - s_1) < \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt[t]{\varepsilon},$$

$$\text{„ } \varrho_2 < \frac{\sigma}{2}, \text{ „ „ } \varrho_2 = \mathrm{mod}\,(s' - s_2) < \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt[u]{\varepsilon},$$

. . . .

$$\text{„ } \varrho_q < \frac{\sigma}{2}, \text{ „ „ } \varrho_q = \mathrm{mod}\,(s' - s_q) < \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt[v]{\varepsilon},$$

und jedesmal alle übrigen ϱ gröfser als $\frac{\sigma}{2}$, wie klein auch ε sein mag. — In diesen Beziehungen bezeichnet s' eine der Wurzeln $s'_1, \ldots s'_\nu, \ldots s'_n$. Für jede dieser Wurzeln s'_ν giebt es nach dem Vorigen eine Wurzel s_μ der ursprünglichen Gleichung II⁰), so dafs

$$\mathrm{mod}\,(s'_\nu - s_\mu) < \frac{\sigma}{2} \sqrt[\tau]{\varepsilon}$$

ist, wo τ eine der Zahlen $t, u \ldots v$ bezeichnet.

$$\text{Ist } \mathrm{mod}\,(s'_1 - s_\alpha) < \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt[\alpha]{\varepsilon}, \text{ so ist ferner für } \varepsilon = 0 : \lim s'_1 = s_\alpha,$$

$$\text{„ } \mathrm{mod}\,(s'_2 - s_\beta) < \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt[\beta]{\varepsilon}, \text{ „ „ „ „ } \varepsilon = 0 : \lim s'_2 = s_\beta,$$

. . . .

$$\text{„ } \mathrm{mod}\,(s'_n - s_\gamma) < \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt[\gamma]{\varepsilon}, \text{ „ „ „ „ } \varepsilon = 0 : \lim s'_n = s_\gamma,$$

wo $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ Indices aus der Reihe $1, 2, \ldots q$ sind. — Um etwas Näheres über diese Indices zu erfahren, erinnern wir uns daran, dafs

$$s'^n + (f_1 + \delta f_1) . s'^{n-1} + \ldots + (f_n + \delta f_n) \equiv (s' - s'_1)(s' - s'_2) \ldots (s' - s'_n),$$

$$s^n + f_1 . s^{n-1} + \ldots + f_n \equiv (s - s_1)^t (s - s_2)^u \ldots (s - s_q)^v,$$

und daher

$$\delta f_1 . s'^{n-1} + \ldots + \delta f_n \equiv (s' - s'_1) \ldots (s' - s'_n) - (s - s_1)^t (s - s_2)^u \ldots (s - s_q)^v$$

ist. Läfst man hierin $\varepsilon = 0$ werden, so verschwindet, gemäfs B⁰), die linke Seite identisch, rechts geht s' in s, s'_1 in s_α, s'_2 in $s_\beta, \ldots s'_n$ in s_γ über, und es wird daher identisch:

$$(s - s_\alpha)(s - s_\beta) \ldots (s - s_\gamma) = (s - s_1)^t . (s - s_2)^u \ldots (s - s_q)^v,$$

was nur dann möglich ist, wenn von den Indices $\alpha, \beta, \ldots \gamma$, t den Wert 1, u den Wert 2, ... v den Wert q haben. — Wir können also den Satz aussprechen:

Satz VI°) Grenzt man die Schwankungen δf_μ der Koeffizienten $f_1 \ldots f_n$ der Gleichung II°) ein gemäſs den Bedingungen:

A°) $$N = \sqrt[n]{M^n + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n},$$

B°) $$\operatorname{mod} \delta f_\mu \overline{\leq} \frac{\varepsilon}{n} \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{\varkappa N}\right)^{n-\mu}, \quad (\mu = 1, 2, \ldots n)$$

C°) $$0 < \varepsilon \overline{\leq} 1,$$

so ordnen sich die Wurzeln s' der neuen Gleichung in so viel Gruppen, als die Gleichung II°) von einander verschiedene Wurzeln hatte. Einer t-fachen Wurzel s_1 von II°) entspricht eine Gruppe von t Wurzeln s' der neuen Gleichung, und es ist für jede dieser t Wurzeln

$$\operatorname{mod}(s' - s_1) < \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt[t]{\varepsilon};$$

für $\varepsilon = 0$ gehen diese t Wurzeln s' alle über in s_1.

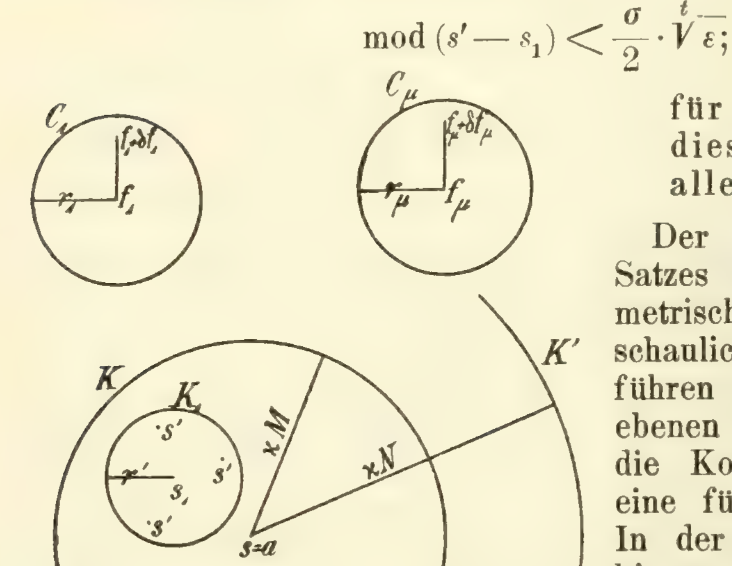


Fig. 3.

Der Inhalt dieses Satzes läſst sich geometrisch leicht veranschaulichen. — Wir führen zwei Zahlenebenen ein, eine für die Koeffizienten und eine für die Wurzeln. In der f-Ebene markieren wir die n Punkte, welche die Werte von $f_1 \ldots f_n$ für ein bestimmtes z darstellen (Fig. 3), und schlagen

um diese n Punkte Kreise $C_1, \ldots C_\mu \ldots C_n$ mit den Radien

$$p_\mu = \frac{\varepsilon}{n}\left(\frac{\sigma}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{\varkappa N}\right)^{n-\mu}, \ (\mu = 1, 2 \ldots n).$$

Die Bedingung B°) für mod δf_μ heifst dann nichts anderes, als: dafs die Koeffizienten $f_1, \ldots f_\mu, \ldots f_n$ in ihren Schwankungen auf das Innere der Kreise $C_1, \ldots C_\mu, \ldots C_n$ beschränkt sein sollen. Wird $\varepsilon = 0$, so reduzieren $C_1 \ldots C_n$ sich auf ihren Mittelpunkt. In der s-Ebene markieren wir ebenso die q Wurzeln $s_1 \ldots s_q$. Die entsprechenden Punkte, die wir kurzweg mit $s_1 \ldots s_q$ bezeichnen, liegen alle innerhalb eines um den Punkt $s = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius $\varkappa M$ beschriebenen Kreises K. Um $s_1 \ldots s_q$ als Mittelpunkte beschreiben wir weiter Kreise $K_1, \ldots K_q$ mit den Radien $r_1' = \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt[t]{\varepsilon}, \ldots r_q' = \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt[v]{\varepsilon}$; diese Kreise liegen alle innerhalb eines um $s = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius $\varkappa N > \varkappa M$ beschriebenen Kreises K'. Nach dem vorigen Satze liegen dann, so lange $f_1, \ldots f_n$ in ihren Schwankungen auf das Innere der Kreise $C_1 \ldots C_n$ beschränkt sind, innerhalb K_1 t Wurzeln s', innerhalb K_2 $u, \ldots$ innerhalb K_q v Wurzeln s'. Es sind somit alle Wurzeln s' eingegrenzt, und zwar, da $K_1, \ldots K_q$ sich nicht schneiden können, jede nur einmal.

Die im Vorigen durchgeführte, von Christoffel in seinen Vorlesungen über Abel'sche Funktionen vorgetragene Methode der Eingrenzung der Wurzeln, benutzen wir, um nachzuweisen, dafs $s_1 \ldots s_n$ stetige Funktionen von $f \ldots f_n$ sind.

Definition: Eine Funktion S der komplexen Variabeln t heifst innerhalb eines bestimmten Gebietes G der t-Ebene stetige Funktion von t, wenn mit der gröfsten Schwankung von t innerhalb G auch die Maximalschwankung von S innerhalb des G entsprechenden Gebietes der S-Ebene verschwindet.*)

*) Christoffel: Mathem. Ann. Bd. 53.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dafs der Maximalschwankung von t innerhalb G die Maximalschwankung von S nicht zu entsprechen braucht.

Beschränken wir, wie im Vorhergehenden, die Schwankungen δf_u auf das Innere der Kreise $C_1, \ldots C_n$, so sind die Maximalschwankungen von $f_1 \ldots f_n$ innerhalb dieser Gebiete:

$$2r_1,\ 2r_2, \ldots 2r_n.$$

Die Maximalschwankungen von $s_1, \ldots s_n$ innerhalb der entsprechenden, nachgewiesenen Schwankungsgebiete $K_1 \ldots K_q$ sind

$$2r_1',\ 2r_2', \ldots 2r_q'.$$

Aus den Werten der r und r' ergiebt sich aber: läfst man ε kleiner werden, so nehmen $2r_1, \ldots 2r_n$ und mit ihnen $2r_1', \ldots 2r_q'$ ab; wird $\varepsilon = 0$, so verschwinden $2r_1, \ldots 2r_n$ und zugleich auch $2r_1', \ldots 2r_q'$. Zusammen mit den Sätzen II°) und III°); dieses Paragraphen liefert dies den

Satz VII°) Die Wurzeln $s_1, \ldots s_n$ der algebraischen Gleichung

$$s^n + f_1 \cdot s^{n-1} + \ldots + f_n = 0$$

sind stetige Funktionen der Koeffizienten $f_1, \ldots f_n$, so lange keiner dieser Koeffizienten unendlich wird.

Die Koeffizienten $f_1, \ldots f_n$ sind rationale Funktionen von z, also stetige Funktionen von z, so lange sie nicht ∞ werden. Innerhalb eines Gebietes G der z-Ebene, in dem $f_1, \ldots f_n$ endlich bleiben, verschwinden also mit der Maximalschwankung von z auch die Maximalschwankungen von $f_1, \ldots f_n$, und mit diesen, nach dem vorigen Satze, auch die Maximalschwankungen von $s_1, \ldots s_n$. Wir haben so den

Satz VIII°) Jede algebraische Funktion s ist stetige Funktion von z, so lange sie nicht unendlich wird.

Fassen wir alle Resultate dieses Paragraphen zusammen, so erhalten wir den

Fundamentalsatz: Die einzige Art von Unstetigkeit, die eine algebraische Funktion darbieten kann, besteht darin, dafs sie unendlich wird; dies wird sie nur zu endlicher Ordnung und nicht unendlich oft.

Dieser Fundamentalsatz gilt auch für die einwertigen rationalen Funktionen von z; während diese letzteren aber, aufser dem Unendlichwerden, keine weitere Art von Singularitäten aufweisen, werden wir im folgenden Paragraphen eine zweite Art von Singularitäten algebraischer Funktionen kennen lernen.

---

§ 3. Mehrdeutigkeit der algebraischen Funktionen; Verzweigungspunkte und vielfache Punkte.

Bei den folgenden Betrachtungen nehmen wir die Grundgleichung

$$\varphi_0 \cdot s^n + \varphi_1 \cdot s^{n-1} + \ldots + \varphi_n = 0$$

als irreducibel an, d. h., wir setzen voraus, das Polynom $\varphi_0 \cdot s^n + \ldots + \varphi_n$ lasse sich nicht zerlegen in zwei in s und z ganze Faktoren.

In der z-Ebene nehmen wir einen beliebigen, nicht singulären Punkt $z = \alpha$, in dem also $s_1, \ldots s_n$ n von einander verschiedene Werte haben. Eine dieser Wurzeln, etwa s_1, fassen wir ins Auge.

Vom Punkte $z = \alpha$ ausgehend, lassen wir z auf einem Wege l, der sonst beliebig ist, aber durch keinen singulären Punkt hindurchgehen soll, bis zum Punkte $z = \beta$ gehen (Fig. 4). Nach dem Schlufssatz des vorigen Paragraphen ändert sich s_1 stetig auf diesem Wege und geht vom Anfangswerte $s_1(\alpha)$ in einen bestimmten Endwert $s_1(\beta)$ über. Diesen Weg l ändern wir nun, mit Beibehaltung der Punkte α und β, in folgender Weise.

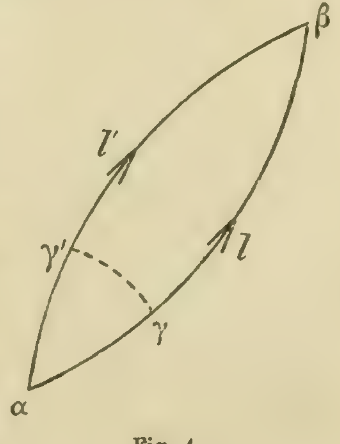


Fig. 4.

Jedem Punkte γ von l, in dem $f_1 \dots f_n$ die Werte $f_1(\gamma), \dots f_n(\gamma)$ haben mögen, ordnen wir einen aufserhalb l liegenden Punkt γ' so zu, dafs die Bedingungen:

$$\text{A}^0)\quad \begin{cases} \operatorname{mod} \delta f_\mu \overline{\overline{<}} \frac{\varepsilon}{n} \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{\varkappa N}\right)^{n-\mu}, \\ 0 < \varepsilon \overline{\overline{<}} 1, \\ N = \sqrt[n]{M^n + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n} \end{cases}$$

erfüllt bleiben. Dadurch wird dem Werte $s_1(\gamma)$ nach den Resultaten des vorigen Paragraphen eine und nur eine Wurzel s_1' so zugeordnet, dafs

$$\operatorname{mod}(s_1'(\gamma') - s_1(\gamma)) < \frac{\sigma}{2} \cdot \varepsilon$$

ist. Führen wir dies für alle Punkte von l so aus, dafs die Punkte γ' einen zusammenhängenden von α nach β führenden Linienzug l' bilden, so wird l' um so näher bei l liegen, je kleiner wir ε nehmen, und es wird sich s_1' längs l' stetig ändern. Zu Anfang ist $s_1'(\alpha) = s_1(\alpha)$, längs l' ist überall $\operatorname{mod}(s_1' - s_1) < \frac{\sigma}{2} \cdot \varepsilon$ und für $\varepsilon = 0$ geht s_1' in s_1 über; im Punkt β ist also wieder $s_1'(\beta) = s_1(\beta)$, d. h.: geht s_1 auf den zwei benachbarten Wegen l und l', deren Nachbarschaft durch die Bedingungen A^0) festgelegt ist, vom nicht singulären Punkt α zum nicht singulären Punkt β, so erreicht es in β jedesmal denselben Endwert. Dasselbe gilt einzeln für $s_2, \dots s_n$.

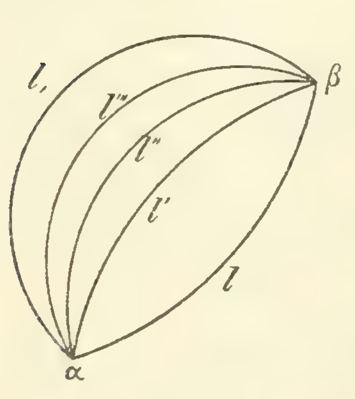


Fig. 5.

Konstruiert man, unter beständiger Innehaltung der Bedingungen A^0) zu l' weitere Nachbarwege l'', l''', u. s. w., so erhält man schliefslich zwischen α und β zwei Wege l und l_1 (Fig. 5), deren entsprechende Punkte überall endlichen Abstand von einander haben. Liegt weder auf l und l_1, noch zwischen denselben ein singulärer Punkt, so führen beide Wege jede Wurzel s_ν von

demselben Anfangswerte $s_\nu(\alpha)$ zu demselben Endwerte $s_\nu(\beta)$.

Die Natur der hierbei ausgeschlossenen singulären Punkte läfst sich genauer angeben. Wird s innerhalb des von l und l_1 begrenzten Flächenstückes $G\infty$, so setze man

$$S = \frac{s}{s - a}, \text{ oder umgekehrt } s = \frac{aS}{S-1},$$

wo a eine Konstante ist. Für $s = \infty$ wird $S = 1$; diejenigen Punkte z, in denen $S = \infty$ wird, sind die Punkte, in denen $s = a$ wird, also die Wurzeln der Gleichung:

$$a^n + f_1(z) \cdot a^{n-1} + \ldots + f_n(z) = 0.$$

Wählt man daher die Konstante a so, dafs die m Wurzeln dieser Gleichung aufserhalb G liegen, so ist S innerhalb G stetig. Die Wege l und l_1 führen dann S von demselben Anfangswerte zu demselben Endwerte, wofern G, l und l_1 keine Wurzelkoincidenz von S enthalten. Da aber die Wurzelkoincidenzen für S und s stets für dieselben Werte von z auftreten, und a immer so gewählt werden kann, dafs S in G nicht ∞ wird, so ergiebt sich aus dem Vorigen der

Satz I⁰) Wird die algebraische Funktion s von irgend einem Punkte α zu irgend einem Punkte β stetig fortgesetzt auf 2 verschiedenen Wegen l und l_1, und ihr in α jedesmal derselbe Anfangswert erteilt, so erlangt sie in β jedesmal denselben Endwert, wofern weder auf noch zwischen l und l_1 eine Wurzelkoincidenz vorkommt.

Aus diesem Satze folgt unmittelbar:

Satz II⁰) Jeder geschlossene Weg (Ringweg) l, der keine Wurzelkoincidenz umschliefst, führt jede Wurzel zu ihrem Anfangswerte zurück.

Beweis: Läfst man in Satz I⁰) den Endpunkt β des Weges l mit dem Anfangspunkte α zusammenfallen, so geht l in einen Ringweg über, während l_1 sich auf den Punkt α reduziert, also irgend eine Wurzel s_ν vom Werte $s_\nu(\alpha)$ zu demselben Werte $s_\nu(\alpha)$ überführt. Stnd dann die Bedingungen des Satzes I⁰) erfüllt, so umschliefst l keine Wurzelkoincidenz

und führt jede Wurzel s_ν vom Anfangswerte $s_\nu(\alpha)$ zu demselben Endwerte wie l_1, d. h. zum Endwerte $s_\nu(\alpha)$, w. z. b. w.

Weiter gelten folgende Sätze.

Satz III⁰) Es giebt in der z-Ebene stets Ringwege, die eine beliebige Wurzel s_ν nicht zu ihrem Anfangswerte zurückführen.

Beweis: Würde s_ν auf jedem Ringwege zu seinem Anfangswerte zurückkehren, so wäre s_ν eine einwertige Funktion von z, und weil sie nur durch Unendlichwerden unstetig wird und dies nur zu endlicher Ordnung und in einer endlichen Anzahl von Punkten, sogar eine rationale Funktion von z. $s - s_\nu$ wäre dann auch rational in z, was der Annahme widerspricht, dafs die Grundgleichung irreducibel sei.

Satz IV⁰) Für jeden Ringweg l bilden die Endwerte der Wurzeln eine Permutation der Anfangswerte.

Beweis: Der Ringweg l führe die n Wurzeln

$$s_1,\ s_2, \ldots s_n$$

über in

$$s_1',\ s_2', \ldots s_n'.$$

Dann wird zugleich das Gleichungspolynom

$$\Phi = \varphi_0 (s - s_1)(s - s_2) \ldots (s - s_n)$$

übergeführt in

$$\Phi' = \varphi_0 (s - s_1')(s - s_2') \ldots (s - s_n').$$

Da Φ aber ganze Funktion von z sind, so ist identisch

$$\Phi = \Phi',$$

was nur möglich ist, wenn die Endwerte $s_1' \ldots s_n'$ bis auf die Reihenfolge mit den Anfangswerten $s_1 \ldots s_n$ übereinstimmen.

Nach Satz II⁰) kann die durch einen Ringweg herbeigeführte Permutation der Anfangswerte die identische Permutation sein, nach Satz III⁰) ist dies aber jedenfalls nicht immer der Fall.

Satz V⁰) Die durch einen Ringweg herbeigeführte Permutation der Anfangswerte der Wurzeln läfst sich stets in eine Anzahl cyklischer Permutationen dieser Anfangswerte auflösen.

Der Beweis ergiebt sich aus der Lehre von den Permutationen.

Satz VI^0) Es läfst sich, bei irreducibeler Grundgleichung, stets ein Ringweg so anlegen, dafs er eine beliebige Wurzel, etwa s_1, in eine beliebige andere Wurzel überführt;

und umgekehrt:

giebt es solche Ringwege, so ist die Grundgleichung irreducibel.

Beweis: Ad 1^0) Angenommen, s_1 lasse sich durch keinen Ringweg in eine der Wurzeln $s_3 \ldots s_n$ überführen; dann giebt es nach Satz III^0) sicher einen Ringweg, der s_1 in s_2 überführt. Ist l ein solcher Ringweg, so sind zwei Möglichkeiten vorhanden:

α^0) auch s_2 läfst sich in keine der Wurzeln $s_3 \ldots s_n$ überführen; dann giebt es, wieder nach Satz III^0), einen Ringweg, der s_2 in s_1 überführt. Das Produkt $(s - s_1)(s - s_2)$ wäre daher eine einwertige, rationale Funktion von z und die Grundgleichung wäre reducibel, was der Voraussetzung widerspricht.

β^0) s_2 läfst sich durch einen Ringweg λ in eine der Wurzeln $s_3, \ldots s_n$, etwa in s_n, überführen. Dann wird auch s_1, wenn z hinter einander die Ringwege l und λ durchläuft, in s_n übergeführt, was gegen die Annahme ist, dafs s_1 in keine der Wurzeln $s_3 \ldots s_n$ übergeführt werden kann. — Diese letztere Annahme steht also im Falle α^0) in Widerspruch mit der vorausgesetzten Irreducibilität der Grundgleichung, im Falle β^0) in Widerspruch mit sich selbst, ist also falsch.

Ad 2^0) Wäre die Grundgleichung nicht irreducibel, so liefse sich das Polynom Φ derselben in mindestens zwei Faktoren

$$\Phi_1 = (s - s_1) \ldots (s - s_\varkappa) \ldots (s - s_k),$$
$$\Phi_2 = (s - s_{k+1}) \ldots (s - s_\nu) \ldots (s - s_n), \quad (\Phi = \Phi_1 . \Phi_2)$$

zerlegen, die einwertige, rationale Funktionen von z sind. Führt dann ein Ringweg l eine Wurzel $s_\varkappa$ von $\Phi_1 = 0$ in eine Wurzel s_ν von $\Phi_2 = 0$ über, so führt dieser Ringweg,

die Ungleichheit der n Wurzeln $s_1 \dots s_n$ vorausgesetzt, Φ_1 nicht zu seinem Anfangswert zurück, d. h. Φ_1 ist nicht einwertige Funktion von z. Die Annahme, die Grundgleichung sei unter den obigen Voraussetzungen nicht irreducibel, steht daher in Widerspruch mit sich selbst.

Satz VII°) Kann ein Ringweg l durch Zusammenziehen oder Erweitern in einen anderen Ringweg λ so deformiert werden, dafs dabei keine Wurzelkoincidenz überschritten wird, so liefern beide Ringwege l und λ dieselbe Permutation der Wurzeln, vorausgesetzt, dafs man alle Wurzeln vom Anfangspunkte a von l stetig fortsetzt bis zum Anfangspunkte α von λ (Fig. 6°).

Beweis: a°) Enthält der innere Ringweg keine Wurzelkoincidenz, so ergiebt sich die Richtigkeit des Satzes unmittelbar aus Satz II°).

b°) Der innere Ringweg (hier λ) umschliefse Wurzelkoincidenzen. In diesem Falle denken wir uns den Ringweg $l (= a m n a)$ zuerst zusammengezogen in den Ringweg l_1 $(= a \alpha \mu \nu \beta a)$, der zum Teil mit λ zusammenfällt (Fig. 6°).

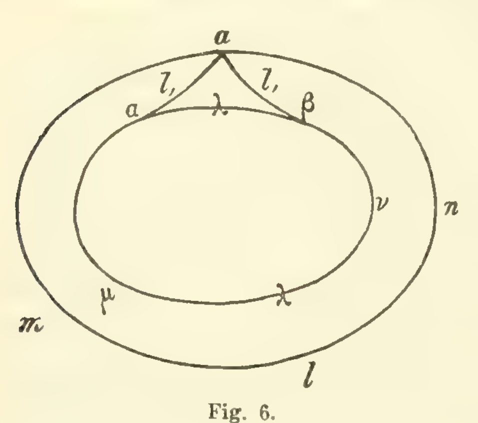


Fig. 6.

Da zwischen l und l_1 keine Wurzelkoincidenz liegt, so führen beide jede Wurzel s_ν zu demselben Endwerte, liefern also dieselbe Permutation der Anfangswerte $s_\nu(a)$. Denkt man sich daher jede der n Wurzeln $s_1 \dots s_\nu \dots s_n$ von ihrem Anfangswerte $s_\nu(a)$ stetig fortgesetzt bis zum Punkte α längs des Weges $a l_1 \alpha$ und bezeichnet die Werte im Punkte α mit $s_\nu(\alpha)$ $(\nu = 1, 2, \dots n)$, so führt der Ringweg $\alpha \mu \nu \beta a \alpha$ eine Permutation der Anfangswerte $s_\nu(\alpha)$ herbei, die gleich ist der Permutation der Anfangswerte $s_\nu(a)$, die der Ringweg $a m n a$ liefert. Nach Satz I°) läfst sich aber, bei der stetigen Fortsetzung einer Wurzel, der Weg $\beta l_1 a l_1 \alpha$ ohne Änderung des Endwertes ersetzen durch den Weg $\beta \lambda \alpha$. Der Ringweg λ $(= \alpha \mu \nu \beta \alpha)$ bringt daher dieselbe Permutation der Anfangs-

werte $s_\nu(a)$ hervor, wie der Ringweg l_1, d. h. der Ringweg λ permutiert die Anfangswerte $s_\nu(a)$ genau ebenso wie der Ringweg l die Anfangswerte $s_\nu(a)$ permutiert, w. z. b. w.

Aus den vorhergehenden Sätzen ergiebt sich, dafs, wenn eine algebraische Funktion s längs eines von z beschriebenen Ringweges l stetig fortgesetzt wird, es für den Endwert von s von entscheidendem Einflufs ist, ob l Wurzelkoincidenzen umschliefst oder nicht. Soll eine durch eine gegebene Gleichung definierte algebraische Funktion s von z genauer studiert werden, so hat man daher zuerst die Wurzelkoincidenzen zu ermitteln und hierauf deren Einflufs zu untersuchen. Zu diesem letzteren Zwecke legt man um die einmal ermittelten Koincidenzpunkte Ringwege, die immer nur je eine Koincidenz umschliefsen. Diese Ringwege denken wir uns, was nach Satz VII⁰) erlaubt ist, so angelegt, dafs sie die Koincidenzpunkte in unmittelbarer Nähe umlaufen (Puiseux's „courbes élémentaires").

Über die Koincidenzpunkte ist noch Folgendes zu bemerken:

Ist $c = a$ ein Koincidenzpunkt, in dem $\varkappa$ Wurzeln der Grundgleichung denselben endlichen oder unendlichen Wert annehmen, so sind mehrere Fälle zu unterscheiden:

1⁰) Ein den Punkt $z = a$ in unmittelbarer Nähe umlaufender Ringweg l führt diese $\varkappa$ Wurzeln in eine Permutation derselben über, die aus einem einzigen $\varkappa$-gliedrigen Cyklus besteht. In diesem Falle heifst a ein Verzweigungspunkt der Funktion s und zwar ein $(\varkappa - 1)$ facher Verzweigungspunkt oder ein Verzweigungspunkt von der Ordnung $\varkappa$. Ist speziell $\varkappa = 2$, so heifst der Punkt $z = a$ ein einfacher Verzweigungspunkt.

2⁰) Der Ringweg l führt die $\varkappa$ Wurzeln über in eine Permutation derselben, die sich in μ Cyklen auflöst. Die Anzahl der Elemente in diesen Cyklen sei $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots \varkappa_\mu$ $(\varkappa = \varkappa_1 + \dots + \varkappa_\mu)$, wo nicht alle Zahlen $\varkappa_1 \dots \varkappa_\mu$ gleich 1 sind. Der Punkt $z = a$ ist dann wieder ein Verzweigungspunkt der Funktion s und zwar läfst sich derselbe ansehen als entstanden aus der Vereinigung von μ Vereinigungspunkten von den resp. Ordnungen $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots \varkappa_\mu$. Ist eine der Zahlen $\varkappa_1 \dots \varkappa_\mu$, etwa $\varkappa_\nu$ gleich 1, so ist $z = a$ für die den entsprechenden eingliedrigen Cyklus bildende Wurzel

kein Verzweigungspunkt, sondern ein nicht singulärer, **regulärer** Punkt.

3°) Der Ringweg l führt die $\varkappa$ Wurzeln in eine Permutation derselben über, die sich in $\varkappa$ eingliedrige Cyklen auflöst. In diesem Falle heifst $z = a$ ein **$\varkappa$-facher Punkt** von s **ohne Verzweigung**, oder ein $\varkappa$-facher Punkt mit **getrennten Zweigen**. Einen solchen Punkt rechnen wir nicht mehr zu den singulären Punkten.

Schliefslich ist noch zu erwähnen, dafs es auch Punkte $z = a$ geben kann, in denen $\varkappa$ Wurzeln denselben Wert σ, $\varkappa'$-Wurzeln denselben, von σ verschiedenen Wert σ', ... annehmen. In diesem Falle sind für jede der aus $\varkappa, \varkappa'$ ... Wurzeln bestehenden Wurzelgruppen die drei eben besprochenen Möglichkeiten in Betracht zu ziehen.

Die Resultate dieses und des vorigen Paragraphen haben uns gezeigt, dafs die algebraischen Funktionen von z nur zwei Arten von Singularitäten aufweisen: **Unstetigkeitspunkte und Verzweigungspunkte**. Die Art des Unstetigwerdens ist bei den algebraischen Funktionen dieselbe, wie bei den einwertigen rationalen Funktionen von z; beide werden unstetig nur durch Unendlichwerden, sie werden ∞ nur zu endlicher Ordnung und nicht ∞ oft. Bei den algebraischen Funktionen treten dann noch Verzweigungspunkte auf, und diese sind es, auf denen die Mehrdeutigkeit dieser Funktionen beruht.

---

§ 4. Beispiele mehrdeutiger Funktionen.

Die im Vorigen abgeleiteten Resultate wollen wir in diesem Paragraphen an einigen speziellen Beispielen erläutern und namentlich zeigen, wie geeignete Ringwege die Wurzeln einer algebraischen Gleichung permutieren.

Beispiel I°) Sei

$$s^2 - (z - a) = 0.$$

Die durch diese Gleichung definierte algebraische Funktion s von z ist 2-wertig; ihre beiden Zweige s_1, s_2 sind gegeben durch die Gleichungen:

$$s_1 = +\sqrt{z - a}, \quad s_2 = -\sqrt{z - a}.$$

Im Punkte $z = a$ wird $s_1 = s_2 = 0$; $z = a$ ist also ein Koincidenzpunkt.

Von einem in der Nähe von $z = a$ gelegenen Punkte $z = \zeta$, in dem s die 2 entgegengesetzt gleichen Werte $\sigma_1 = +\sqrt{\zeta - a}$, $\sigma_2 = -\sqrt{\zeta - a}$ besitzt, beschreiben wir um den Punkt $z = a$ einen Ringweg l (Fig. 7). Ist nun in Polarkoordinaten:

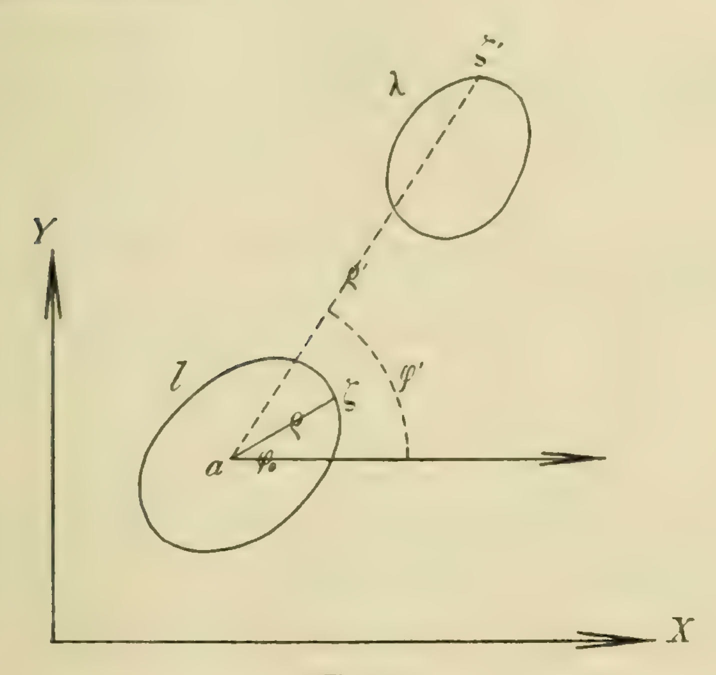


Fig. 7.

$$z - a = r \cdot e^{i\varphi},$$
$$\zeta - a = \varrho \cdot e^{i\varphi_0},$$

so ist

$$\sigma_1 = \varrho^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i\frac{\varphi_0}{2}}, \quad \sigma_2 = -\varrho^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i\frac{\varphi_0}{2}}.$$

Beschreibt z von $z = \zeta$ aus den Ringweg l, so wächst φ_0 um 2π, und es geht

$$\sigma_1 \text{ über in } s = \varrho^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi_0}{2} + \pi\right)} = \sigma_2,$$

$$\text{und } \sigma_2 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad s = -\varrho^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi_0}{2} + \pi\right)} = \sigma_1.$$

Der Ringweg l permutiert also die 2 Wurzeln σ_1 und σ_2, d.h. $z = a$ ist ein Verzweigungspunkt der durch $s^2 - (z - a) = 0$ definierten algebraischen Funktion s.

Ein zweimaliger Umlauf um $z = a$ führt jede Wurzel wieder in sich selbst über. Läfst man z von einem Punkt ζ' aus (Fig. 7) für den $\zeta' - a = \varrho' . e^{i\varphi'}$ ist, einen Ringweg λ durchlaufen der $z = a$ nicht umschliefst, so kehrt, wie die Figur zeigt, φ' zu seinem Anfangswerte zurück. Ein solcher Ringweg führt daher, in Übereinstimmung mit Satz II⁰.) § 3, jede Wurzel zu ihrem Anfangswerte zurück.

Beispiel II⁰.) Sei

$$s^2 - (z^3 - a^3) = 0.$$

Die Funktion s ist zweiwertig; ihre 2 Zweige s_1, s_2 sind definiert durch die 2 Gleichungen:

$$s_1 = + \sqrt{(z - a)(z - \alpha a)(z - \alpha^2 a)},$$

$$s_2 = - \sqrt{(z - a)(z - \alpha a)(z - \alpha^2 a)},$$

wo α die 3te Einheitswurzel $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ bezeichnet. — Koincidenzpunkte sind die Punkte $z = a$, $z = \alpha a$, $z = \alpha^2 a$.

Führt man Polarkoordinaten ein, und setzt:

$$z - a = r_1 . e^{i\varphi_1},$$
$$z - \alpha a = r_2 . e^{i\varphi_2},$$
$$z - \alpha^2 a = r_3 . e^{i\varphi_3},$$

so erhält man:

$$s = (r_1 r_2 r_3)^{\frac{1}{2}} . e^{i\frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3}{2}}.$$

Beschreibt z einen Ringweg l, der keinen der 3 Punkte $a, \alpha a, \alpha^2 a$ einschliefst, so kehrt jeder der 3 Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ zu seinem Anfangswerte zurück. (Fig. 8). Ein solcher Ringweg führt also, in Übereinstimmung mit Satz II, § 3, jede der Wurzeln s_1, s_2 zu ihrem Anfangswerte zurück.

Beschreibt z einen Ringweg l, der einen der 3 Punkte a, αa, $\alpha^2 a$, etwa a, umschliefst, so wächst φ_1 um 2π, φ_2

und φ_3 aber kehren zu ihren Anfangswerten zurück. Es geht also

$$s_1 \text{ über in } + (r_1\, r_2\, r_3)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2} i(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + i\pi} = s_2,$$

$$\text{und } s_2 \text{ in } \quad - (r_1\, r_2\, r_3)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2} i(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + i\pi} = s_1.$$

Ein solcher Ringweg permutiert daher die 2 Wurzeln s_1 und s_2. Dasselbe gilt von allen Ringwegen, die nur einen der drei Punkte a, αa, $\alpha_2 a$ umschliefsen, d. h. die Punkte a, $a\alpha$, $\alpha_2 a$ sind Verzweigungspunkte von s.

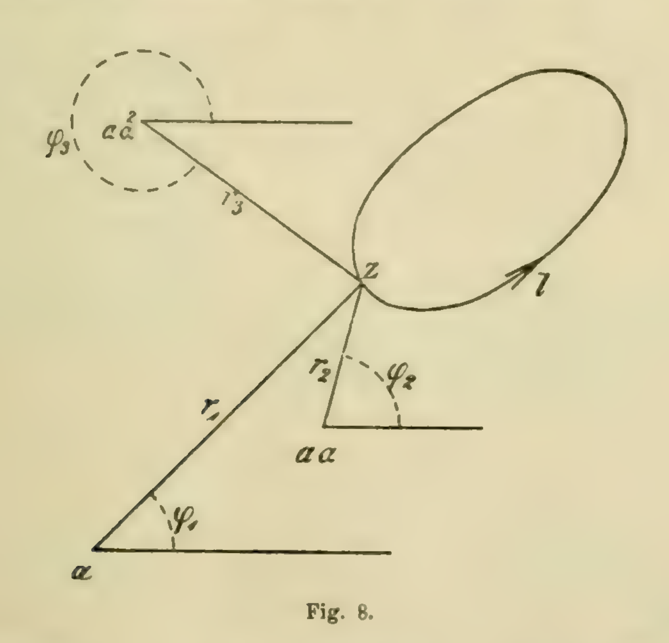


Fig. 8.

Beschreibt z einen Ringweg l, der 2 der 3 Verschweigungspunkte, etwa a und αa, umläuft, so kehrt φ_3 wieder zu seinem Anfangswerte zurück, während φ_1 und φ_2 je um 2π wachsen. Es geht dann

$$s_1 \text{ in } + (r_1\, r_2\, r_3)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{i}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + 2\pi i} = s_1,$$

$$\text{und } s_2 \;\text{,,}\; = (r_1\, r_2\, r_3)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{i}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + 2\pi i} = s_2$$

über. Ein solcher Ringweg führt daher jede Wurzel zu ihrem Anfangswerte zurück. Dasselbe Resultat erhält man, wenn man, was nach Satz VII⁰) § 3, erlaubt ist, den Ringweg l durch zwei von demselben Punkte ausgehenden Ringwege l_1 und l_2 (Fig. 9) ersetzt, von denen l_1 nur den einen Verzweigungspunkt a, l_2 nur αa umschliefst.

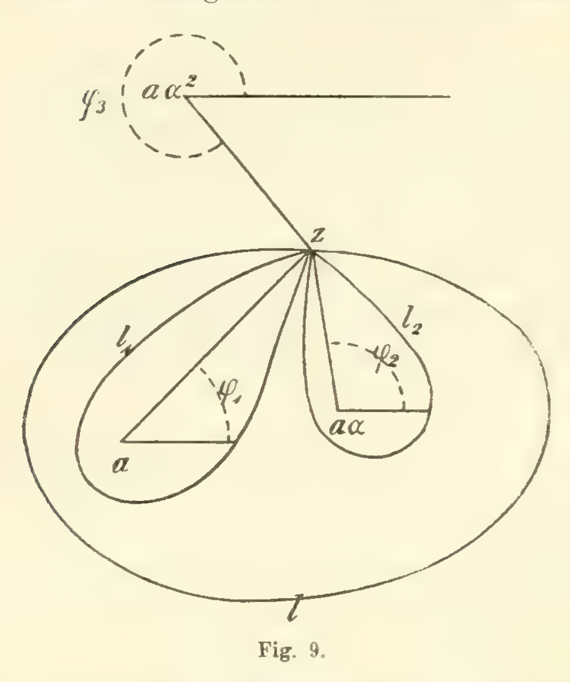


Fig. 9.

Jeder Ringweg endlich, der die 3 Verzweigungspunkte a, αa, $\alpha^2 a$ umschliefst, permutiert s_1 und s_2. — Es wird sich später*) ergeben, dafs der unendlich ferne Punkt $z = \infty$ der z-Ebene ebenfalls ein Verzweigungspunkt von s ist, ein Resultat, dafs sich übrigens ohne Schwierigkeit auch aus Satz II⁰) § 3 ableiten liefse.

Beispiel III⁰) Sei

$$s^2 - (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_{2q+1}) = 0.$$

Die Funktion s ist zweiwertig und besitzt, wie eine Wiederholung der Betrachtungen des vorigen Beispiels ergiebt, einfache Verzweigungspunkte an den Stellen $z = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2q+1}$. Dazu kommt noch, wie in Beispiel II⁰) ein Verzweigungspunkt im Unendlichen.

Ringwege in der z-Ebene permutieren die 2 Wurzeln s_1, s_2 oder führen jede Wurzel zu ihrem Anfangswerte zurück, je nachdem sie eine ungerade Anzahl $1, 3, \ldots 2q+1$ oder eine gerade Anzahl $0, 2, \ldots 2q$ der Verzweigungspunkte $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{2q+1}$ umschliefsen.

---

*) Aus Satz III⁰) § 5).

Beispiel IV°) Sei

$$s^3 . (z - b_1)(z - b_2) - (z - a_1)(z - a_2) = 0.$$

Die durch diese Gleichung definierte algebraische Funktion s ist d r e i w e r t i g. Bezeichnen s_1, s_2, s_3 ihre Werte für ein gegebenes z, und ist

$$s_1 = \sqrt[3]{\frac{(z - a_1)(z - a_2)}{(z - b_1)(z - b_2)}},$$

wo die dritte Wurzel den in der Arithmetik gebräuchlichen Sinn hat, so sind s_2 und s_3 gegeben durch

$$s_2 = \alpha . s_1,$$
$$s_3 = \alpha^2 . s_1,$$

wo α wieder die dritte Einheitswurzel $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ bedeutet. — Führt man Polarkoordinaten ein:

$$z - a_1 = r_1 . e^{i\varphi_1},\ z - a_2 = r_2 . e^{i\varphi_2},$$
$$z - b_1 = \varrho_1 . z^{i\psi_1},\ z - b_2 = \varrho_2 . e^{i\psi_2},$$

so wird

$$s_1 = \left(\frac{r_1 r_2}{\varrho_1 \varrho_2}\right)^{\frac{1}{3}} . e^{i\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{3} - \frac{\psi_1 + \psi_2}{3}\right)}$$

und wieder $\qquad s_2 = \alpha s_1,\ s_3 = \alpha^2 s_1.$

Die Funktion s besitzt Wurzelkoincidenzen in den Punkten a_1, a_2; dort wird $s_1 = s_2 = s_3 = 0$. Ebenso findet Koincidenz statt in den Punkten b_1, b_2; dort wird $s_1 = s_2 = s_3 = \infty$.

Bezüglich der möglichen Ringwege l unterscheiden wir folgende Fälle:

1°) l umschliefst keinen der vier Verzweigungspunkte: alle Wurzeln kehren zu ihrem Anfangswert zurück.

2°) l umschliefst den e i n e n Verzweigungspunkt a_1: beim Durchlaufen von l in positiver Richtung, d. h. in der Richtung der wachsenden Winkel, wächst φ_1 um 2π, während φ_2, ψ_1 und ψ_2 ihre Anfangswerte wieder erreichen. l führt daher

$$s_1 \text{ über in } \left(\frac{r_1 r_2}{\varrho_1 \varrho_2}\right)^{\frac{1}{3}} . e^{i\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{3} - \frac{\psi_1+\psi_2}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$= s_1 . e^{\frac{2\pi i}{3}} = s_1 . \alpha = s_2,$$

und $\qquad s_2$ in $\alpha_2 = s_3$, s_3 in $\alpha s_3 = \alpha^3 s_1 = s_1$.

Der Ringweg l permutiert also $s_1 s_2 s_3$ cyklisch in $s_2 s_3 s_1$. Die gleiche cyklische Permutation $s_2 s_3 s_1$ von $s_1 s_2 s_3$ bringt jeder Ringweg hervor, der nur a_2 umschliefst.

3º) l umschliefst nur den Verzweigungspunkt b_1: durchläuft z diesen Ringweg in der Richtung der wachsenden Winkel, so wächst ψ_1 um 2π, während φ_1, φ_2, ψ_2 wieder ihre Anfangswerte erreichen. Es geht dann also

$$s_1 \text{ über in } s_1 . e^{-\frac{2\pi i}{3}} = \alpha^2 . s_1 = s_3,$$

und analog $\quad s_2$ in $\alpha^2 s_2 = s_1$, s_3 in $\alpha^2 s_3 = s_2$.

Der Ringweg l permutiert also $s_1 s_2 s_3$ cyklisch in $s_3 s_1 s_2$. Die gleiche Permutation bringt ein in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufener Ringweg hervor, der nur den Verzweigungspunkt b_2 umschliefst.

Ebenso ergiebt sich, wenn wir uns die Ringwege immer in positiver Richtung durchlaufen denken:

4º) Ein Ringweg um a_1 und a_2 permutiert $s_1 s_2 s_3$ cyklisch in $s_3 s_1 s_2$; ein Ringweg um a_1 und b_1 führt jede Wurzel zu ihrem Anfangswerte zurück, und ebenso jeder Ringweg um a_2 und b_2, oder um a_1 und b_2, oder a_2 und b_1 oder um sämtliche vier Verzweigungspunkte a_1, a_2, b_1, b_2. Analog läfst sich die durch einen Ringweg um b_1 und b_2 oder um je drei Verzweigungspunkte hervorgerufene Permutation von $s_1 s_2 s_3$ bestimmen.

Zum Schlufs wollen wir noch an einem Beispiele nachweisen, dafs Koincidenzpunkte nicht notwendigerweise Verzweigungspunkte p sind.

Beispiel Vº) Sei $s^3 + z^3 - 1 = 0$.

Die Funktion s ist dreiwertig. Bezeichnen s_1, s_2, s_3 ihren Wert für ein bestimmtes z, und setzt man

$$s_1 = -\sqrt{(z-1)(z-\alpha)(z-\alpha^2)}\,, \quad \left(\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)$$

so ist

$$s_2 = \alpha\, s_1,$$
$$s_3 = \alpha^2\, s_1.$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten:

$$z - 1 = r_1 \,.\, e^{i\varphi_1},$$
$$z - \alpha = r_2 \,.\, e^{i\varphi_2},$$
$$z - \alpha^2 = r_3 \,.\, e^{i\varphi_3},$$

wird hieraus:

$$s_1 = -(r_1\, r_2\, r_3)^{\frac{1}{3}} \,.\, e^{\frac{1}{3}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)}.$$

und wieder $\qquad s_2 = \alpha\, s_1,\ s_3 = \alpha_2\, s_1.$

Koincidenzen zwischen s_1, s_2, s_3 finden statt in den Punkten $z = 1,\ \alpha,\ \alpha^2$. Wiederholt man die Betrachtungen des vorigen Beispiels, so ergiebt sich:

1º) Ringwege, die keinen der drei Verzweigungspunkte umschliefsen, führen jede Wurzel zu ihrem Anfangswerte zurück.

2º) Ringwege, die nur einen der drei Verzweigungspunkte umschliefsen, permutieren $s_1 s_2 s_3$ cyklisch in $s_2\, s_3\, s_1$, wenn sie von den Variabelen z in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufen werden. $z = 1,\ \alpha,\ \alpha^2$ sind daher Verzweigungspunkte.

3º) Ringwege, die zwei Verzweigungspunkte umschliefsen, und in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufen werden, permutieren $s_1 s_2 s_3$ cyklisch in $s_3\, s_1\, s_2$.

4º) Ringwege, welche die drei Verzweigungspunkte umschliefsen, führen jede Wurzel zu ihrem Anfangswerte zurück.

Wir untersuchen nun auch noch das Verhalten von s für $z = \infty$. Zu dem Zwecke setzen wir:

$$s = \frac{1}{s'},\ z = \frac{1}{z'},$$

wodurch die Grundgleichung in

$$s'^3\,(z'^3 - 1) - z'^3 = 0$$

übergeht, und untersuchen s' als Funktion von z' für $z' = 0$ ($z = \infty$). — Es ist zunächst

$$s_1' = \frac{1}{s_1} = \frac{z'}{\sqrt[3]{z'^3 - 1}}, \quad s_2' = \alpha\, s_1', \quad s_3' = \alpha^2\, s_1'$$

oder
$$s_2' = \frac{\alpha}{s_1} = \frac{\alpha^2}{s_2}, \quad s_3' = \frac{\alpha^2}{s_1} = \frac{\alpha}{s_3}.$$

Für $z' = 0$ wird $s_1' = s_2' = s_3' = 0$ und daher $s_1 = s_2 = s_3 = \infty$. Für $z = \infty$ findet also Wurzelkoincidenz statt. Führt man aber Polarkoordinaten ein:

$$z' = r\,.\,e^{i\varphi},$$
$$z' - 1 = r_1\,.\,e^{i\varphi_1},$$
$$z' - \alpha = r_2\, e^{i\varphi_2},$$
$$z' - \alpha^2 = r_3\, e^{i\varphi_3},$$

so dafs z. B. s_1' sich schreiben läfst in der Form:

$$s_1' = \frac{r\,e^{i\varphi}}{(r_1 r_2 r_3)^{\frac{1}{3}}\,.\,e^{\frac{i}{3}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)}},$$

so erkennt man sogleich: durchläuft z' einen Ringweg, der $z' = 0$ umschliefst, aber $z' = 1, \alpha, \alpha^2$ ausschliefst, so erreichen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ wieder ihre Anfangswerte, während φ sich um 2π ändert. s_1' und ebenso s_2' und s_3' kehren daher auf einem solchen Ringweg zu ihren Anfangswerten zurück. Also führt auch ein Ringweg von z um $z = \infty$ jede der drei Wurzeln s_1, s_2, s_3 zu ihrem Anfangswerte zurück. Der Punkt $z = \infty$ ist daher für s ein dreifacher Punkt ohne Verzweigung.

Dieses Resultat liefse sich auch aus Satz II⁰), § 3 ableiten.

---

§ 5. Bestimmung der Wurzelkoincidenzen.

Soll die durch die Grundgleichung:

$$\text{I}^0)\qquad F\binom{n\ \ m}{s, z} = \varphi_0\,.\,s^n + \varphi_1\, s^{n-1} + \ldots + \varphi_n = 0$$

definierte algebraische Funktion s von z genauer untersucht werden, so ist es unbedingt notwendig, zuerst die Zahl, Lage

und Natur ihrer Verzweigungspunkte zu bestimmen. Da aber Verzweigungspunkte nur dann auftreten können, wenn zwei oder mehr Wurzeln s von I°) für dasselbe z gleiche Werte annehmen (koincidieren), so mufs der Bestimmung der Verzweigungspunkte die der Wurzelkoincidenzen voraus gehen.

Die Grundgleichung I°) besitzt gleiche Wurzeln nur für diejenigen Werte von z, die neben I°) auch die Gleichung

$$\text{II°)}\quad \frac{\partial F}{\partial s} = n\varphi_0 \,.\, s^{n-1} + (n-1)\varphi_1 s^{n-2} + \ldots + \varphi_{n-1} = 0$$

befriedigen. Eliminiert man s zwischen I°) und II°), so ergiebt sich eine Gleichung für z, deren Wurzeln die Koincidenzen liefern.

Übersichtlicher läfst sich diese Elimination in folgender Weise vornehmen. Bezeichnet man die Polynome der Gleichungen I°) und II°) kurz mit F und F', so verschwindet bei gleichzeitigem Verschwinden von F und F' auch das Polynom:

$$\text{III°)}\qquad F_1 = nF - s\,.\,F'.$$

Man erhält die Wurzelkoincidenzen also auch, wenn man s aus den Gleichungen

$$1°)\qquad F' = n\varphi_0 s^{n-1} + \ldots + \varphi_{n-1} = 0,$$

$$2°)\qquad F_1 = \varphi_1 \,.\, s^{n-1} + 2\varphi_2 \,.\, s^{n-2} + \ldots + n\varphi_n = 0$$

eliminiert und die sich ergebende Resultante nach z auflöst. — Diese Resultante ergiebt sich am einfachsten nach der Sylvester'schen*) sogenannten dialytischen Eliminationsmethode in Determinantenform.

Wir multiplizieren die Gleichung 1°) der Reihe nach mit $s^{n-2}, s^{n-3}, — s, s^0$, die Gleichung 2°) ebenso, und sehen die so entstehenden $2(n-1)$ Gleichungen an als Gleichungen mit den $2(n-1)$ Unbekannten $s^{2n-3}, s^{2n-4}, \ldots s, s^0$. Die Resultante dieser Gleichungen läfst sich schreiben in der Form:

*) Sylvester, Philosophical Magazine f. 1840. No. 101.

$$3^\circ)\quad D = \begin{vmatrix} n\varphi_0 & (n-1)\varphi_1 & (n-2)\varphi_2 \ldots & 2\varphi_{n-2} & \varphi_{n-1} & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & n\varphi_0 & (n-1)\varphi_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 2\varphi_{n-2} & \varphi_{n-1} & 0 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\; n\varphi_0 & (n-1)\varphi_1 & (n-2)\varphi_2 & \ldots\ldots & \varphi_{n-1} \\ \varphi_1 & 2\varphi_2 & 3\varphi_3 & \ldots (n-1)\varphi_{n-1} & n\varphi_n & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 2\varphi_2 & \ldots\ldots\ldots & (n-1)\varphi_{n-1} & n\varphi_n & 0 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\; \varphi_1 & 2\varphi_2 & 3\varphi_3 & \ldots\ldots & n\varphi_n \end{vmatrix}$$

Diese Determinante D heifst die Discriminante der Grundgleichung $F = 0$. Für dieselbe gilt der aus der Algebra bekannte

Satz I°) Die Gleichung $F\binom{n\ m}{s, z} = 0$ hat dann und nur dann mehrfache Wurzeln, wenn ihre Discriminante D verschwindet.

Will man daher die Wurzelkoincidenzen von $F = 0$ ermitteln, so berechne man D und löse die Gleichung $D = 0$ nach z auf. Die Wurzeln dieser Gleichung sind die Werte von z, für die zwei oder mehr Wurzeln $s_1 \ldots s_n$ von $F = 0$ einander gleich werden.

Beispiel: Die Grundgleichung heifse:

$$8zs^3 + 3(1-z)s + (1-z) = 0.$$

Die Discriminante D dieser Gleichung lautet, in Determinantenform geschrieben:

$$D = \begin{vmatrix} 24z & 0 & 3(1-z) & 0 \\ 0 & 24z & 0 & 3(1-z) \\ 0 & 6(1-z) & 3(1-z) & 0 \\ 0 & 0 & 6(1-z) & 3(1-z) \end{vmatrix},$$

oder, wenn wir entwickeln und von einem Zahlenfaktor $24 \,.\, 108$ absehen:

$$D = z(1-z^2)(z+1).$$

Es finden also Wurzelkoincidenzen statt für $z = -1, 0, +1$.

Die Discriminante D einer Gleichung $F\binom{n\ m}{s, z} = 0$, in der mindestens ein Koeffizient φ bis zum Grade m in z

ansteigt, ist, wie die Determinantenform derselben zeigt, in z höchstens vom Grade $2m(n-1)$. Bezeichnet man daher als einfache Koincidenz eine solche, bei der nur zwei gleiche Wurzeln, und nicht mehr als 2-gliedrige Gruppen gleicher Wurzeln oder mehrere Paare gleicher Wurzeln auftreten, so gilt der

Satz II°) Die Anzahl der einfachen Wurzelkoincidenzen einer Gleichung

$$F\binom{n\ \ m}{s, z} = 0$$

beträgt höchstens $2m(n-1)$.

Bemerkung: Ist das Polynom F in s und z homogen und vom Grade n, so haben $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ in z die Grade $0, 1, 2, \ldots n$. Die Discriminante D ist dann in z vom Grade $n(n-1)$.

Das in Satz I°) aufgestellte Kriterium ist insofern unvollständig, als es, streng genommen, nur die im Endlichen liegenden Wurzelkoincidenzen liefert. Will man prüfen, ob auch für $z = \infty$ Koincidenzen auftreten, so hat man nur die unabhängige Variabele z zu ersetzen durch $\frac{1}{z'}$ und für die neue Gleichung in s und z' die Discriminante zu bilden. Hat letztere den Faktor z', so hat die ursprüngliche Gleichung Wurzelkoincidenzen für $z = \infty$. — Einfacher läfst sich jedoch diese Frage auf folgendem Wege entscheiden.

Statt in der ursprünglichen Gleichung $F = 0$ zuerst $z = \frac{1}{z'}$ zu setzen, die Discriminante der neuen Gleichung in s und z' zu bilden und dann $z' = 0$ werden zu lassen, kann man auch die Gleichung $F = 0$ zuerst durch z^m dividieren, von der neuen Gleichung

$$\frac{\varphi_0}{z^m} s^n + \frac{\varphi_1}{z^m} . s^{n-1} + \ldots + \frac{\varphi_n}{z^m} = 0$$

die Discriminante D_1

$$D_1 = \begin{vmatrix} n\frac{\varphi_0}{z^m} & (n-1)\frac{\varphi_1}{z^m} & \ldots & 2\frac{\varphi_{n-2}}{z^m} & \frac{\varphi_{n-1}}{z^m} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & n\frac{\varphi_0}{z^m} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \frac{\varphi_{n-1}}{z^m} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & n\frac{\varphi_0}{z^m} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \frac{\varphi_{n-1}}{z^m} \\ \frac{\varphi_1}{z^m} & 2\frac{\varphi_2}{z^m} & \ldots\ldots\ldots & & n\frac{\varphi_n}{z^m} & \ldots\ldots\ldots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{\varphi_1}{z^m} & 2\frac{\varphi_2}{z^m} & \ldots\ldots\ldots & & n\frac{\varphi_n}{z^m} \end{vmatrix}$$

bilden und darin $z = \infty$ setzen. Da nun

$$D_1 = \frac{D}{z^{2m(n-1)}}$$

ist, so wird D_1 stets und nur dann Null für $z = \infty$, wenn der Grad von D in z kleiner als $2m(n-1)$ ist. Dies liefert den Satz:

Satz III°) Für $z = \infty$ findet Wurzelkoincidenz statt oder nicht, je nachdem der Grad von D in z kleiner oder gleich $2m(n-1)$ ist.

Beispiel 1°) Die Discriminante von

$$8zs^3 + 3(1-z)s + (1-z) = 0$$

ist in z vom Grade $4 = 2m(n-1)$. Im Unendlichen findet daher keine Wurzelkoincidenz statt.

Beispiel 2°) Die Gleichung

$$s^3 - 3z^2 s + 2z^3 - 2iz^2(z-i)^2 = 0,$$

für welche $n = 3$, $m = 4$, also $2m(n-1) = 16$ ist, hat die Discriminante:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -3z^2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3z^2 \\ 0 & -6z^2 & 3[2z^3 - 2iz^2(z-i)^2] & 0 \\ 0 & 0 & -6z^2 & 3[2z^3 - 2iz^2(z-i)^2] \end{vmatrix},$$

oder entwickelt:

$$D = -324 z^4 (z - i)^2 (z^2 - 1).$$

Diese Discriminante ist in z vom Grade $8 < 2m(n-1)$; im Unendlichen findet daher Wurzelkoincidenz statt, was sich auch leicht durch die Substitution $s = \frac{1}{s'}$, $z = \frac{1}{z'}$ ergiebt. Für $z = \infty$ oder $z' = 0$ ist

$$s_1' = s_2' = s_3' = 0, \text{ d. h. } s_1 = s_2 = s_3 = \infty.$$

Die Discriminante D, die wir am Anfang dieses Paragraphen in Determinantenform ausgedrückt haben, läfst sich auch in einer in den Wurzeln $s_1, \ldots s_n$ der Grundgleichung $F = 0$ symmetrischen Form darstellen. — Es ist D diejenige Funktion der Koeffizienten $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_n$ von $F = 0$, deren Verschwinden ausdrückt, dafs diese Gleichung gleiche Wurzeln hat oder dafs $F = 0$ und $F' = 0$ gemeinsame Wurzeln haben. Verschwindet D, so wird daher auch das Produkt $F'(s_1) \cdot F'(s_2) \ldots F'(s_n) = 0$. Wird umgekehrt dieses Produkt gleich 0, so haben $F = 0$ und $F' = 0$ gemeinsame Wurzeln, und es verschwindet auch die Discriminante D. Es gilt daher der

Satz IV.[0]) Die Discriminante D der algebraischen Gleichung $F\binom{n\ m}{s, z} = 0$ ist bis auf einen von $s_1 \ldots s_n$ unabhängigen Faktor identisch mit dem Produkt

$$F'(s_1) \cdot F'(s_2) \ldots F'(s_n),$$

wo $F'(s_\nu) = \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_{s = s_\nu}$ ist.

Um diesen Faktor seinem wesentlichen Bestandteile nach zu bestimmen, bezeichnen wir mit $a_1, a_2 \ldots a_n$ die symmetrischen Wurzelfunktionen:

$$a_1 = s_1 + s_2 + \cdots + s_n = -\frac{\varphi_1}{\varphi_0},$$

$$a_2 = s_1 s_2 + \ldots + s_{n-1} s_n = +\frac{\varphi_2}{\varphi_0},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_n = s_1 s_2 \ldots\ldots\ldots s_n = (-1)^n \frac{\varphi_n}{\varphi_0},$$

und setzen die hieraus sich ergebenden Werte

$$\varphi_1 = -\varphi_0 \cdot a_1, \quad \varphi_2 = \varphi_0 \cdot a_2, \ \ldots \varphi_n = (-1)^n \cdot \varphi_0 \cdot a_n$$

von $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ in den Determinantenausdruck von D ein. Dies giebt:

$$D = \varphi_0 \cdot {}^{2n-2} . H.$$

Die hier auftretende Gröfse H ist eine ganze Funktion der symmetrischen Wurzelfunktionen $a_1, \ldots a_n$, also selbst wieder ganze, symmetrische Funktion von $s_1 \ldots s_n$ und mufs, ebenso wie D, verschwinden, so oft zwei Wurzeln einander gleich werden. Als ganze Funktion der Wurzeln mufs sie daher durch jede Wurzeldifferenz $(s_i - s_k)$ $(i, k = 1, 2 \ldots n, \ i \neq k)$ teilbar sein. Als symmetrische Funktion der Wurzeln mufs sie jede Wurzeldifferenz zweimal als Faktor enthalten. Es ist daher H, bis auf einen von den Wurzeln unabhängigen, konstanten Faktor C, gleich dem Quadrat der sogenannten alternierenden Funktion der Wurzeln:

$$\begin{aligned} \Phi = (s_1 - s_2)(s_1 - s_3) \ldots &(s_1 - s_n) \\ (s_2 - s_3) \ldots &(s_2 - s_n) \\ \ldots\ldots &\ldots \\ &(s_{n-1} - s_n), \end{aligned}$$

d. h.

4º) $$D = C \cdot \varphi_0^{2n-2} \cdot \Phi^2.$$

Berücksichtigt man andererseits, dafs

$$\begin{aligned} F'(s_1) &= \varphi_0 (s_1 - s_2)(s_1 - s_3) \ldots (s_1 - s_n), \\ F'(s_2) &= \varphi_0 (s_2 - s_1)(s_2 - s_3) \ldots (s_2 - s_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F'(s_n) &= \varphi_0 (s_n - s_1)(s_n - s_2) \ldots (s_n - s_{n-1}), \end{aligned}$$

und daher

$$F'(s_1) . F'(s_2) \ldots F'(s_n) = \varphi_0^n (-1)^{\frac{1}{2} n(n-1)} . \Phi^2$$

ist, so erhält man für D den Ausdruck:

5º) $$D = C . (-1)^{\frac{1}{2} n(n-1)} . \varphi_0^{n-2} . F'(s_1) . F'(s_2) \ldots F'(s_n),$$

wo C eine von $s_1, s_2 \ldots s_n$ und z unabhängige, konstante Gröfse ist. — Auf die Bestimmung des Zahlenwertes von C

gehen wir hier nicht ein, da dieser Wert im folgenden keine Rolle spielt.

Wir wollen nun noch zeigen, wie man im Falle einfacher Koincidenzen mit Hilfe von D die koincidierenden Wurzeln von $F\binom{n\ m}{s, z} = 0$ bestimmen kann, ohne diese Gleichung aufzulösen.

Zu dem Zwecke schicken wir einen algebraischen Satz voraus. Es sei

$$\varphi(s, z) = a_0 s^q + a_1 s^{q-1} + \ldots + a_q = 0$$

eine algebraische Gleichung, $s_1 \ldots s_q$ ihre Wurzeln, D ihre Discriminante. Wir bilden das Produkt

$$(s - \sigma) \,.\, \varphi(s, z) = a_0 s^{q+1} + \ldots$$

und betrachten die Discriminante D_1 desselben. — Nach 4°) ist:

$$D_1 = C_1 \,.\, a_0^{2q} \,.\, \Phi_1^2,$$

wo C_1 eine Konstante und Φ_1 die alternierende Funktion

$$\begin{aligned} \Phi_1 = (\sigma - s_1)(\sigma - s_2) \ldots (\sigma - s_q) \\ (s_1 - s_2) \ldots (s_1 - s_q) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (s_{q-1} - s_q) \end{aligned}$$

der Wurzeln $\sigma, s_1, s_2 \ldots s_q$ von $(s - \sigma) \,.\, \varphi(s, z) = 0$ bezeichnet. Berücksichtigt man nun, dafs

$$\Phi_1 = (\sigma - s_1)(\sigma - s_2) \ldots (\sigma - s_q) \,.\, \Phi$$

ist, wo Φ die alternierende Funktion der Wurzeln von $\varphi = 0$ bedeutet, so erhält man sogleich aus 4°)

$$\frac{D_1}{D} = \frac{C_1 \,.\, a_0^{2q} \,.\, \Phi^2 \,.\, \prod_{\varkappa=1}^{q} (\sigma - s_\varkappa)^2}{C \,.\, a_0^{2q-2} \,.\, \Phi^2},$$

oder

$$6°) \qquad D_1 = \gamma \,.\, D \,.\, a_0^2 \prod_{\varkappa=1}^{q} (\sigma - s_\varkappa)^2,$$

wo γ eine Konstante ist.

Da aufserdem

$$a_0 \cdot \prod_{\varkappa=1}^{q}(\sigma - s_\varkappa) = \varphi(\sigma, z)$$

ist, so liefert 6º) den

Satz Vº) Die Discriminante von $(s-\sigma).\varphi(s,z)$ ist, von einem numerischen Faktor abgesehen, gleich $\varphi(\sigma,z)^2$ mal der Discriminante von $\varphi(s,z)$.

Wir nehmen nun an, die Discriminante D von

$$F = \varphi_0 s^n + \varphi_1 s^{n-1} + \ldots + \varphi_n$$

verschwinde für ein bestimmtes z und es sei $s_1 = s_2 = \sigma$ die zweimal vorkommende Wurzel; letztere ist dann auch Wurzel der Gleichung

$$\Psi(s,z) = \psi_0 s^n + \psi_1 s^{n-1} + \ldots + \psi_n = 0,$$

wofern zwischen den ψ die eine Beziehung

$$7º) \qquad \psi_0 \sigma^n + \psi_1 \sigma^{n-1} + \ldots + \psi_n = 0$$

stattfindet. Unter dieser Voraussetzung ist, wenn λ einen beliebigen Parameter bedeutet:

$$F + \lambda . \Psi = (s-\sigma)\left[(s-\sigma) . R(s) + \lambda . R_1(s)\right],$$

und die Discriminante Δ von $F + \lambda\Psi$ daher, nach Satz Vº), teilbar durch λ^2. Andererseits ist aber auch

$$\Delta = D + \lambda\left(\psi_0 \cdot \frac{\partial D}{\partial \varphi_0} + \psi_1 \cdot \frac{\partial D}{\partial \varphi_1} + \ldots + \psi_n \cdot \frac{\partial D}{\partial \varphi_n}\right) + \lambda^2(\ldots) + \text{u. s. w.}$$

Da nach Voraussetzung $D = 0$ ist, und Δ, wie eben bewiesen, durch λ^2 teilbar ist, so mufs der Koeffizient von λ in Δ ebenfalls verschwinden, d. h. es ist

$$\psi_0 \cdot \frac{\partial D}{\partial \varphi_0} + \psi_1 \cdot \frac{\partial D}{\partial \varphi_1} + \ldots + \psi_n \cdot \frac{\partial D}{\partial \varphi_n} = 0.$$

Diese Beziehung mufs mit der einen zwischen $\psi_0 \ldots \psi_n$ vorausgesetzten Relation 7º) identisch sein; es sind daher die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial D}{\partial \varphi_0}, \quad \frac{\partial D}{\partial \varphi_1}, \ldots \frac{\partial D}{\partial \varphi_n}$$

resp. proportinoal zu σ^n, σ^{n-1}, ... 1, d. h. man findet den Wert von σ durch Division zweier aufeinander folgenden Differentialquotienten aus der Reihe $\frac{\partial D}{\partial \varphi_0}, \ldots, \frac{\partial D}{\partial \varphi_n}$. Wir können somit den Satz aussprechen:

Satz VI°) Besitzt die algebraische Gleichung

$$F\binom{n \quad m}{s, \; z} = \varphi_0 s^n + \varphi_1 s^{n-1} + \ldots + \varphi_n = 0$$

für ein bestimmtes z zwei koincidierende Wurzeln $s_1 = s_2 = \sigma$, so ist allgemein:

$$\frac{\partial D}{\partial \varphi_\nu} : \frac{\partial D}{\partial \varphi_{\nu+\varkappa}} = \sigma^\varkappa.$$

Hat die Gleichung $F = 0$ für ein gegebenes z mehr als zwei gleiche Wurzeln, so führt die im vorigen Satze mitgeteilte Regel nicht mehr zum Ziele. Wir gehen hierauf nicht näher ein und geben nur noch eine Anwendung des Satzes VI°) auf ein spezielles Beispiel.

Beispiel. Die durch die Gleichung

$$s^3 - 3z^2 s + 2z^3 - 2iz^2(z-i)^2 = 0$$

definierte algebraische Funktion s hat, wie ihre Discriminante:

$$D = -324 \,.\, z^4 (z-i)^2 (z^2 - 1)$$

zeigt, eine Wurzelkoincidenz für $z = 1$. Einer der an dieser Stelle stattfindenden Wurzelwerte ist $= +2$, ein anderer $= -1$; die Wurzelkoincidenz ist daher eine einfache. Um zu entscheiden, welcher der zwei Werte $+2$ und -1 an der Koincidenz teilnimmt, entwickeln wir D nach den Koeffizienten $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = -3z^2$, $\varphi_3 = 2z^3 - 2iz^2(z-i)^2$; es ergiebt sich:

$$D = 81\,\varphi_0^2 \varphi_3^2 + 12\,\varphi_0 \varphi_2^3,$$

$$\frac{\partial D}{\partial \varphi_2} = 36\,\varphi_0 \varphi_2^2, \quad \frac{\partial D}{\partial \varphi_3} = 162\,\varphi_0^2 \varphi_3,$$

$$\frac{\partial D}{\partial \varphi_2} : \frac{\partial D}{\partial \varphi_3} = \frac{2\varphi_2^2}{9\varphi_3} = -1.$$

Für $z = 1$ hat also die obige Gleichung die Wurzeln:

$$-1, \; -1, \; +2.$$

§ 6. Reihenentwickelung der Wurzeln.

Es ist bekannt, welche grofse Rolle in der Theorie der einwertigen Funktionen einer komplexen Variabelen z die Reihenentwickelung dieser Funktionen spielt. Es drängt sich daher von selbst die Frage auf, ob es nicht möglich ist, auch für die Wurzeln einer algebraischen Gleichung Reihenentwickelungen analoger Art aufzustellen. Die Frage ist bejahend zu beantworten; die Reihenentwickelungen gestalten sich jedoch etwas anders als bei den einwertigen Funktionen, und zwar infolge des Auftretens von Verzweigungspunkten.

Bezeichnet $z = a$ irgend einen Punkt der komplexen Zahlenebene, so sind zwei Fälle zu unterscheiden.

I^o) Ein Ringweg, der in unmittelbarer Nähe um $z = a$ herumläuft, führt jede Wurzel zu ihrem Anfangswerte zurück. In diesem Falle verhält sich jede Wurzel s in der Umgebung von $z = a$, wie eine einwertige Funktion, und läfst sich demgemäfs entwickeln in einer Reihe von der Form:

$$1^o) \qquad s = \sum_{\varkappa} C_{\varkappa} \, . \, (z - a)^{\varkappa},$$

wo die $\varkappa$ ganze Zahlen bedeuten. Wird eine oder mehrere Wurzeln unstetig für $z = a$, so treten in den Reihenentwickelungen dieser Wurzeln negative Exponenten $\varkappa$ in endlicher Anzahl auf.

II°) $z = a$ ist ein Verzweigungspunkt, und ein in unmittelbarer Nähe um $z = a$ herumlaufender Ringweg permutiere in cyklischer Weise die ϱ Wurzeln $s_1 \ldots s_\nu \ldots s_\varrho$. Führt man eine neue unabhängige Veränderliche z' ein mit Hilfe der Substitution

$$z - a = z'^{\varrho},$$

so beschreibt die frühere Variabele z n Umläufe um den Punkt $z = a$, wenn z' den Punkt $z' = 0$ einmal umkreist. Da aber n aufeinander folgende Umläufe von z um $z = a$ jede Wurzel wieder zu ihrem Anfangswerte zurückführen, so folgt: die Wurzeln $s_1 \ldots s_\varrho$ sind, als Funktionen von z' aufgefafst, in der Umgebung des Punktes $z' = 0$ einwertig, lassen sich also entwickeln in einer Reihe von der Form:

$$s = \sum_{\varkappa} C_{\varkappa} \, . \, z'^{\varkappa}.$$

Geht man wieder zur ursprünglichen Variabelen z zurück, so erhält man für $s_1 \ldots s_\varrho$ die gemeinsame Entwickelungsform:

$$2^{\circ}) \qquad s = \sum_{\varkappa} C_{\varkappa} \cdot (z - a)^{\frac{\varkappa}{\varrho}}.$$

Die in 2°) auftretenden Koeffizienten $C_\varkappa$ haben dieselben Werte in den Entwickelungen der ϱ Wurzeln, die den ϱ-gliedrigen Cyklus bilden. Ist $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{\varrho}}$ und r einer der ϱ Werte von $(z - a)^{\frac{1}{\varrho}}$, so erhält man aus der für den ganzen Cyklus gültigen Entwickelung 2°) für die einzelnen Wurzeln dieses Cyklus die Entwickelungen:

$$\sum_{\varkappa} C_\varkappa \cdot r^\varkappa, \; \sum_{\varkappa} \alpha \cdot C_\varkappa \cdot r^\varkappa, \; \sum_{\varkappa} \alpha^2 C_\varkappa \cdot r^\varkappa, \ldots \sum_{\varkappa} \alpha^{\varrho - 1} C_\varkappa \cdot r^\varkappa.$$

Werden in $z = a$ die ϱ Wurzeln $s_1 \ldots s_\varrho$ unstetig, so treten in den Reihenentwickelungen dieser Wurzeln negative Exponenten $\varkappa$ in endlicher Anzahl auf.

Für diejenigen Wurzeln, die durch einen Umlauf von z um den Verzweigungspunkt $z = a$ wieder zu ihrem Anfangswert zurückgeführt werden, gelten wie im Fall 1°) Entwickelungen von der Form:

$$s = \sum_{\varkappa} C_\varkappa (z - a)^\varkappa,$$

wo möglicherweise wieder negative Exponenten $\varkappa$ in endlicher Anzahl auftreten.

Alle Entwickelungen von den Formen 1°) oder 2°) haben ihr besonderes Konvergenzgebiet. Denkt man sich in der z-Ebene alle singulären Punkte (Unstetigkeitspunkte und Verzweigungspunkte) von s markiert und um $z = a$ als Mittelpunkt einen Kreis K beschrieben, dessen Peripherie durch den $z = a$ am nächsten liegenden singulären Punkt geht, so ist die für irgend eine Wurzel s_ν gültige Entwickelung, sei sie nun von der Form 1°) oder 2°), innerhalb K konvergent. Reicht die Konvergenz der Entwickelung über K hinaus, so können die auf K liegenden Singularitäten keine Singularitäten von s_ν sein.

Kennt man den Wert, den eine Wurzel s_ν einer algebraischen Gleichung in einem nicht singulären Punkte $z = a$

der z-Ebene besitzt, so läfst sich mit Hilfe der Reihenentwickelung von s_ν in der Umgebung dieses Punktes der Wert berechnen, den s_ν erreicht, wenn der Punkt z auf einem Wege, der allen Singularitäten von s_ν ausweicht, von $z = a$ nach einen Punkt $z = b$ geht. Das Verfahren, das von Puiseux herrührt (Puiseux-Fischer: Untersuchungen über algebraische Funktionen, p. 17—18), ist genau dasselbe, das auch bei den einwertigen Funktionen benutzt wird. Es liefert die stetige Fortsetzung von s_ν.

Die in diesem Paragraphen für die Wurzeln einer algebraischen Gleichung nachgewiesenen Formen der Reihenentwickelung in der Umgebung eines Punktes $z = a$ sind von gänzlich verschiedener Art, je nachdem der Punkt $z = a$ ein Verzweigungspunkt ist oder nicht. Ist $z = a$ für eine Wurzel s_ν kein Verzweigungspunkt, so schreitet die Entwickelung fort nach ganzen Potenzen von $z - a$. Ist $z = a$ ein Verzweigungspunkt von der Ordnung ϱ, und s_ν eine der Wurzeln des zugehörigen ϱ-gliedrigen Cyklus, so schreitet die Entwickelung von s_ν fort nach ganzen Potenzen von $(z - a)^{\frac{1}{\varrho}}$. Dieser wesentliche Unterschied in der Form der Reihenentwickelung kann hinwieder dazu dienen, um zu untersuchen, ob ein Punkt, in dem mehrere Wurzeln koincidieren, ein Verzweigungspunkt ist und von welcher Ordnung derselbe ist, oder ob er ein mehrfacher Punkt ist, ohne Verzweigung. Gelingt es, für einen Wurzelkoincidenzpunkt $z = a$ die Entwickelung der daselbst gleich werdenden Wurzeln wenigstens in ihren Anfangsgliedern festzustellen, so liefern uns die Exponenten von $z - a$ sogleich Aufschlufs über die Natur des Punktes $z = a$. — Im nächsten Paragraphen soll eine Methode dargelegt werden, um wenigstens die Anfangsglieder dieser Reihenentwickelungen zu bestimmen.

---

§ 7) Bestimmung der Reihenentwickelungen nach Puiseux.

Die im Folgenden auseinanderzusetzende Methode ist zuerst ausführlich behandelt worden von Puiseux (Puiseux-Fischer, 2. Teil, p. 24 ff.) und reicht in ihren Grundzügen bis auf Newton zurück.

Im Punkte $z = a$ mögen $\varkappa$ Wurzeln s von $F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right) = 0$ gleich α werden. Setzen wir dann

$$s = \alpha + s', \quad z = a + z',$$

so erhalten wir

$$F\left(\alpha \overset{n}{+} s', \quad a \overset{m}{+} z'\right) = 0,$$

d. h.

$$F\left(\overset{n}{\alpha}, \overset{m}{a}\right) + \sum_f \sum_g A_{fg} z'^f s'^g = 0,$$

oder, da $F\left(\overset{n}{\alpha}, \overset{m}{a}\right) = 0$ ist:

$$1^0) \qquad \sum_f \sum_g A_{fg} z'^f s'^g = 0.$$

Wird $z = a$, also $z' = 0$, so werden nach Voraussetzung $\varkappa$ Werte von s gleich α, also $\varkappa$ Werte von s' gleich Null. Die Gleichung 1⁰) mufs daher Glieder enthalten, die von z' unabhängig sind, nicht aber von s', und die niedrigste Potenz von s', die in diesen Gliedern vorkommt, ist $s'^\varkappa$. Umgekehrt mufs, wenn $s' = 0$ wird, auch einmal $z' = 0$ werden, d. h. die Gleichung 1⁰) mufs auch ein oder mehrere Glieder aufweisen, die von s' unabhängig sind und z' enthalten. Glieder ohne s' und z' kommen in 1⁰) nicht vor.

Es sind nun 2 Fälle zu unterscheiden:

Fall I⁰) Die niedrigste, in den von s' unabhängigen Gliedern von 1⁰) vorkommende Potenz von z' sei die erste Potenz.

Dann hat 1⁰) die Form:

$$2^0) \begin{cases} \quad A \,.\, z' + \text{Glieder mit höheren Potenzen von } z' \\ + B \,.\, s'^\varkappa + \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad s' \\ + \text{Glieder mit } s' \text{ und } z' = 0. \end{cases}$$

Setzt man hierin

$$z' = \eta^\varkappa, \quad s' = v \,.\, \eta,$$

so geht 2⁰) über in

$$(A + B v^\varkappa)\, \eta^\varkappa + \text{Glieder mit dem Faktor } \eta^{\varkappa+1} = 0,$$

oder, nach Division durch $\eta^\varkappa$, in

$$A + B v^\varkappa + \text{Glieder mit dem Faktor } \eta = 0.$$

Unsere Aufgabe besteht nun darin, die Gröfsen v und η zu berechnen, und zwar wird es, wenn wir nur die Anfangsglieder der Entwickelung von s haben wollen, genügen, die angenäherten Werte von v und η zu bestimmen.

Für $z = a$ wird $z' = 0$, also auch $\eta = 0$. In der unmittelbaren Nachbarschaft von $z = a$, d. h. von $\eta = 0$ ist daher angenähert:

$$A + B v^{\varkappa} = 0. \tag{3°}$$

Diese Gleichung liefert, da A und $B \neq 0$ sind, $\varkappa$ endliche Werte für v, nämlich die $\varkappa$ Werte der Wurzel

$$\sqrt[\varkappa]{-\frac{A}{B}}.$$

Bezeichnet v_1 einen der Werte dieser Wurzel, so ist

$$v_2 = v_1 \cdot e^{\frac{2\pi i}{\varkappa}},$$
$$v_3 = v_2 \cdot e^{\frac{2\pi i}{\varkappa}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_{\varkappa} = v_{\varkappa-1} \cdot e^{\frac{2\pi i}{\varkappa}},$$

und, in erster Annäherung:

$$s'_{\lambda} = v_{\lambda} \cdot \eta = v_{\lambda} \cdot z'^{\frac{1}{\varkappa}}, \qquad (\lambda = 1, 2 \ldots \varkappa).$$

Durch einen positiven Umlauf von z' um $z' = 0$ geht $z'^{\frac{1}{\varkappa}}$ über in $z'^{\frac{1}{\varkappa}} \cdot e^{\frac{2\pi i}{\varkappa}}$ und

$$s'_{\lambda} \text{ in } v_{\lambda} \cdot e^{\frac{2\pi i}{\varkappa}} \cdot z'^{\frac{1}{\varkappa}} = v_{\lambda+1} \cdot z'^{\frac{1}{\varkappa}} = s'_{\lambda+1}.$$

Die $\varkappa$ Wurzeln s'_{λ} $(\lambda = 1, 2 \ldots \varkappa)$, und ebenso die im Punkte $z = a$ koincidierenden Wurzeln $s_1 \ldots s_{\varkappa}$ bilden daher einen $\varkappa$-gliedrigen Cyklus; wir haben somit den

Satz I°) Hat die niedrigste Potenz, zu der z' in den von s unabhängigen Gliedern der Gleichung 1°) vorkommt, den Exponenten 1, so ist der Punkt $z = a$ ein Verzweigungspunkt von der Ordnung $\varkappa$;

die dort gleichen Wert erlangenden $\varkappa$ Wurzeln $s_1 \ldots s_\varkappa$ der Gleichung $F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right) = 0$ bilden einen einzigen $\varkappa$-gliedrigen Wurzelcyklus.

Fall II⁰) Die niedrigste Potenz, zu der z' in den von s' unabhängigen Gliedern von 1⁰) vorkommt, sei z^k, wo $k > 1$ ist.

Die Gleichung 1⁰) hat dann die Form

$$2^0_a)\quad \left|\begin{array}{l} 0 = A \,.\, z'^k + \text{Glieder mit höheren Potenzen von } z', \\ \quad + B\, s'^\varkappa + \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad s', \\ \quad + \sum\limits_{f=1}^{k-1} \sum\limits_{g=1}^{\varkappa-1} A_{fg}\, z'^f s'^g + \sum\limits_{f} \sum\limits_{g} B_{fg}\, z'^f s'^g, \end{array}\right.$$

wo in der letzten Doppelsumme f und g nur Werte annehmen können, die $\gtrless k$ resp. $> \varkappa$ sind.

Da wir nur darauf ausgehen, die ersten Glieder in der Entwickelung von s' nach Potenzen von z' zu ermitteln, vernachlässigen wir in 2^0_a) die Glieder höherer Ordnung und erhalten die Gleichung

$$2^0_b)\quad A\, z'^k + \sum_{f=1}^{k-1} \sum_{g=1}^{\varkappa-1} A_{fg}\, z'^f s'^g + B \,.\, s'^\varkappa = 0.$$

Berücksichtigt man, dafs die Entwickelung von s nach Potenzen von z' allgemein von der Form

$$s' = c_1\, z'^{\mu_1} + c_2 \,.\, z'^{\mu_1 + \mu_2} + c_3\, z'^{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} + \ldots$$

ist, wofür man auch folgende Reihe von Gleichungen schreiben kann:

$$\begin{aligned} s' &= z'^{\mu_1} (c_1 + \zeta_1), \\ \zeta_1 &= z'^{\mu_2} (c_2 + \zeta_2), \\ \zeta_2 &= z'^{\mu_3} (c_3 + \zeta_3), \text{ u. s. w.,} \end{aligned}$$

so sieht man sogleich, dafs unsere Aufgabe darin besteht, mit Hilfe der Gleichung 2^0_b) die Gröfsen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, c_1, c_2, c_3, \ldots$ zu bestimmen. Die zu dieser Bestimmung führende Methode Puiseux's besteht wesentlich in Folgendem.

Mit Zugrundelegung eines rechtwinkeligen Koordinatensystems (Fig. 10⁰) denkt man sich jedes einzelne Glied des

Gleichungspolynoms 2_b^0) repräsentiert durch einen Punkt P mit Koordinaten, die den Exponenten von z' und s' in diesem Gliede gleich sind. Einem Gliede $A_{45}\, z'^4 s'^5$ würde auf diese Weise ein Punkt mit der Abscisse $f = 4$ und der Ordinate $g = 5$ entsprechen. Die Punkte K und L sind die Repräsentanten von $A\, z'^k$ und $B\, s'^{\varkappa}$.

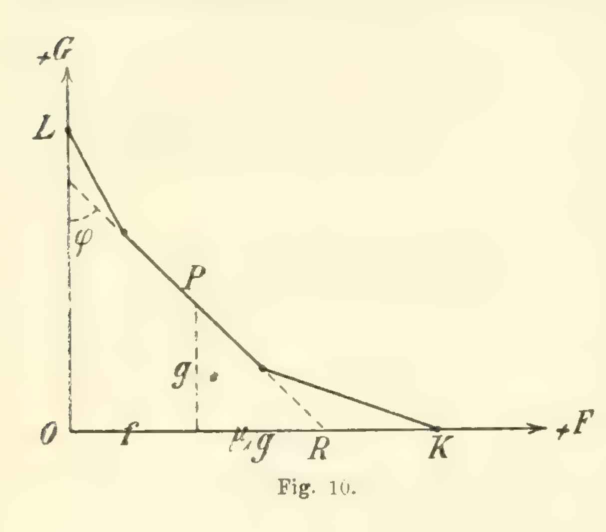


Fig. 10.

Um c_1 und μ_1 zu bestimmen, setzen wir nun 2_b^0) in erster Annäherung:

$$s' = c_1 \,.\, z'^{\mu_1},$$

so dafs ein beliebiges Glied $A_{fg}\, z'^f s'^g$ von 2_b^0) nunmehr z' zur Ordnung $\mu_1 g + f$ enthält. Denken wir uns durch den dieses Glied repräsentierenden Punkt P mit den Koordinaten f, g eine Gerade gelegt, welche die Ordinatenachse OG unter einem solchen Winkel φ trifft, dafs $\operatorname{tang} \varphi = \mu_1$ ist, so schneidet diese Gerade auf der Abscissenachse OF ein Stück $\overline{OR} = \mu_1 g + f$ ab. Bedeutet ferner $A_{f'g'}\, z'^{f'} s'^{g'}$ ein anderes Glied von 2_b^0), das nach Ausführung der Substitution $s' = c_1 z'^{\mu_1}$ in z' vom Grade $\mu_1 g' + f' = \mu_1 g + f$ ist, und denkt man sich durch den dieses Glied repräsentierenden Punkt P' mit den Koordinaten f', g' eine Gerade so gelegt, dafs sie mit OG einen Winkel φ' bildet, dessen Tangente ebenfalls gleich μ_1 ist, so ist $\varphi' = \varphi$ und die Gerade schneidet auf OF ein Stück $\mu_1 g' + f' = \mu_1 g + f$ ab. Diese letztere Gerade fällt also mit der ersteren durch P gehenden zusammen. Alle Glieder von 2_b^0), die nach Ausführung der Substitution $s' = c_1 z'^{\mu_1}$ in z von demselben Grade sind, werden daher durch Punkte P repräsentiert, die auf einer und derselben Geraden liegen. Da ferner die Gleichheit

$$\mu_1 g + f = \mu_1 g' + f'$$

bei gleichem μ_1, für $f' < f$ nur bestehen kann, wenn $g' > g$ ist, so mufs eine solche Gerade sowohl die positive Ab-

seissen — als die positive Ordinatenachse schneiden, also von der positiven f-Achse nach der positiven g-Achse ansteigen.

Vom Punkt L ausgehend, denken wir uns nun eine Gerade, die zuerst mit LO zusammenfällt; wir drehen dieselbe um L in der der Drehung der Uhrzeiger entgegengesetzten Richtung, bis sie zum erstenmale einen der Punkte P trifft; hierauf drehen wir sie durch den letzten Punkt, der in ihrer Richtung liegt, etwa P_j, bis sie zuerst wieder durch einen anderen Punkt P geht, und so fort, bis wir schliefslich zu einer Geraden kommen, die durch K geht. Auf diese Weise entsteht ein polygonaler Linienzug, der seine konvexe Seite dem Koordinatenanfangspunkt zukehrt. Die einzelnen Stücke dieses Zuges nennen wir die Seiten desselben. Jede Seite beginnt und endigt mit einem Punkte P, und aufserdem können auf ihr noch weitere Punkte dieser Art liegen. — Es gilt nun offenbar Folgendes:

1°) μ_1 kann soviel Werte annehmen als der Polygonzug Seiten hat;

2°) der einer Seite entsprechende Wert von μ_1 ist die Tangente des Winkels, den diese Seite mit der Achse $0\,G$ bildet;

3°) zur Bestimmung des Anfangsgliedes der Reihenentwickelung von s' nach Potenzen von z' hat man bei jeder Seite des Polygonzuges diejenigen Glieder von 2 b) zu berücksichtigen, deren repräsentierende Punkte P auf dieser Seite liegen.

Liegen auf einer Seite σ Punkte P_ϱ ($\varrho = 1, 2 \ldots \sigma$), so ist für diese Seite:

$$\mu_1 g_1 + f_1 = \mu_1 g_2 + f_2 = \cdots = \mu_1 g_\varrho + f_\varrho = \cdots = \mu_1 g_\sigma + f_\sigma$$

oder

$$4°)\quad \mu_1 = \frac{f_1 - f_2}{g_2 - g_1} = \ldots = \frac{f_1 - f_\varrho}{g_\varrho - g_1} = \ldots = \frac{f_1 - f_\sigma}{g_\sigma - g_1} = \frac{r}{q},$$

wo r prim sei zu q.

Ist g_1 die kleinste, g_σ die gröfste aller Ordinaten der σ Punkte P_ϱ auf der betreffenden Seite, ist also

$$A_{f_\sigma g_\sigma} z'^{f_\sigma} s'^{g_\sigma} + \sum_{\varrho \neq 1,\, \sigma} A_{f_\varrho g_\varrho} z'^{f_\varrho} s'^{g_\varrho} + A_{f_1 g_1} z'^{f_1} s'^{g_1}$$

das Aggregat der auf dieser Seite durch die P_ϱ repräsentierten Glieder des Polynoms 2 b⁰), so liefert die Substitution $s' = c_1 . z'^{\frac{r}{q}} = c_1 . \zeta^r$ in dieses $= 0$ gesetzte Aggregat zur Bestimmung von c_1 die Gleichung:

$$A_{f_\sigma g_\sigma} . c_1^{g_\sigma} \zeta^{qf_\sigma + rg_\sigma} + \sum_{\varrho \mp 1,} \sum_{\sigma} A_{f_\varrho g_\varrho} . c_1^{g_\varrho} . \zeta^{qf_\varrho + rg_\varrho}$$
$$+ A_{f_1 g_1} c_1^{g_1} . \zeta^{qf_1 + rg_1} = 0.$$

Da gemäfs 3⁰)

$$qf_\sigma + rg_\sigma = \ldots = qf_\varrho + rg_\varrho = \ldots = qf_1 + rg_1$$

ist, so geht diese Gleichung nach Division durch $c_1^{g_1} \zeta^{qf_\varrho + rg_\varrho}$ über in:

$$5^0) \quad A_{f_\sigma g_\sigma} . c_1^{g_\sigma - g_1} + \sum_{\varrho \mp 1,} \sum_{\sigma} A_{f_\varrho g_\varrho} c_1^{g_\varrho - g_1} + A_{f_1 g_1} = 0.$$

Die Gleichung 5⁰) liefert $g_\sigma - g_1$ Werte für c_1, die zusammen mit dem durch 4⁰) gegebenen Werte von μ_1 die Anfangsglieder der Reihenentwickelung von $g_\sigma - g_1$ Zweigen der Funktion s' oder s bestimmen, d. h.:

Satz II⁰) Jede Seite des polygonalen Zuges liefert die Anfangsglieder der Reihenentwickelung so vieler Zweige von s, als die Differenz zwischen Anfangs- und Endordinate der Seite angiebt.

Die Gesamtheit aller Seiten liefert demnach die Anfangsglieder so vieler Reihenentwickelungen als die Maximalordinate OL angiebt, d. h. $\varkappa$ Anfangsglieder.

Beachtet man, dafs in 4⁰) $g_\varrho - g_1$ $(\varrho = 2 \ldots \sigma)$ ein Vielfaches von q ist, z. B.

$$g_\varrho - g_1 = t_\varrho . q, \quad (t_\sigma > t_\varrho \text{ für } \varrho < \sigma)$$

so kann man für 5⁰) auch schreiben:

$$5^0_a) \qquad A_{f_\sigma g_\sigma} . c_1^{t_\sigma . q} + \sum_{\varrho \mp 1,} \sum_{\sigma} A_{f_\varrho g_\varrho} c_1^{t_\varrho . q} + A_{f_1 g_1} = 0.$$

Diese Gleichung ist eine Gleichung in c_1^q und liefert t_σ Wurzeln c_1^q. Ist C eine derselben, so sind die zugehörigen Werte $c_{11}, c_{12} \dots c_{1q}$ von c_1 die q Werte von $C^{\frac{1}{q}}$. Denken wir uns $c_{11}, c_{12} \dots c_{1q}$ so geordnet, daſs jedes c gleich dem vorhergehenden mal $e^{\frac{2\pi i r}{q}}$ ist, was möglich ist, da r prim zu q ist, so sind

$$c_{11} \cdot z'^{\frac{r}{q}}, c_{12} \cdot z'^{\frac{r}{q}}, \dots, c_{1q} \cdot z'^{\frac{r}{q}}$$

die entsprechenden Werte von $s' = c_1 \cdot z'^{\frac{r}{q}}$, und diese q Werte von s' bilden einen q-gliedrigen Cyklus. — Dies gilt für jede Wurzel c_1^q von 5_a^0); wir haben somit den

Satz III^0) Ist für eine Seite mit den Endkoordinaten g_σ und g_1:

$$g_\sigma - g_1 = t_\sigma \cdot q,$$

so lösen sich die $g_\sigma - g_1$ Werte von s, die dieser Seite entsprechen, in t_σ q-gliedrige Gruppen auf.

Bei der Ableitung dieses Satzes ist stillschweigend angenommen worden, daſs die t_σ Wurzeln c_1^q von 5_a^0) alle von einander verschieden sind. Ist dies nicht der Fall, sind λ Wurzeln c_1^q von 5_a^0) einander gleich, so haben λ von den t_σ Reihenentwickelungen der q-gliedrigen Cyklen dasselbe Anfangsglied. Um diese Systeme von einander zu trennen, müssen wir weitere Glieder der Reihenentwickelungen bestimmen. Wir erreichen dies, indem wir in der ursprünglichen Gleichung 2_a^0) neue Variabeln einführen, gemäſs der Substitution:

$$z' = z_1^q,$$
$$s' = (c_1 + \zeta_1) z_1^r.$$

Die Gleichung 2_a^0) geht dann über in eine Gleichung zwischen ζ_1 und z_1, deren Polynom ganze Funktion von ζ_1 und z_1 ist. Diese Gleichung untersuchen wir, unter Anwendung der Substitution

$$\zeta_1 = c_2 \cdot z_1^{\mu_2}$$

mit Hilfe eines neuen Polygons und erhalten so den Wert von $\mu_2' \left(= \frac{r_2}{q_2}\right)$ und eine Gleichung für $c_2{}^{q_2}$. Es ist dann in 2. Annäherung:

$$s' = \left(c_1 + c_2 \, . \, z_1^{\mu_2'}\right) z_1^r,$$

oder:
$$s' = \left(c_1 + c_2 z'^{\mu_2}\right) . \, z'^{\mu_1}, \text{ wo } \mu_2 = \frac{\mu_2'}{q}.$$

Hat die für $c_2{}^{q_2}$ gefundene Gleichung nur ungleiche Wurzeln, so sind nun die t_σ der betreffenden Seite des ersten Polygons zugeordneten q-gliedrigen Wurzelcyklen von einander getrennt; hat diese Gleichung wieder gleiche Wurzeln, so mufs man zur Bestimmung weiterer Glieder der Reihenentwickelungen fortschreiten. — So setzt sich das fort, bis man schliefslich zu einer Gleichung in $c_\nu{}^{q_\nu}$ mit lauter ungleichen Wurzeln kommt.

Bei der praktischen Anwendung der vorigen Methode fängt man am bequemsten mit derjenigen Seite des Polygonzuges an, deren Anfangspunkt der Punkt L der Ordinatenachse ist, und nimmt hierauf der Reihe nach die übrigen Seiten vor.

Ist für eine Seite mit der Ordinatendifferenz $g_\sigma - g_1$ der Wert von μ_1 eine ganze Zahl, so ist $q = 1$ und $t_\sigma = g_\sigma - g_1$. Die dieser Seite entsprechenden $g_\sigma - g_1$ Zweige von s bilden dann für $z = a$ t_σ eingliedrige Cyklen, d. h. der Punkt $z = a$ ist für diese $g_\sigma - g_1 = t_\sigma$ Zweige ein t_σ-facher Punkt ohne Verzweigung.

In den bisherigen Ausführungen ist stillschweigend angenommen worden, dafs s im Koincidenzpunkt $z = a$ lauter endliche zusammenfallende Wurzelwerte besitzt. Werden für $z = a$ mehrere Wurzeln ∞, so führt die vorige Methode, nach Anwendung der Substitution $s = \frac{1}{z'}$ immer noch zum Ziel. Liegt eine Wurzelkoincidenz im Unendlichen, so wendet man, wenn kein $s = \infty$ wird, die Substitution $z = \frac{1}{z'}$, und wenn mehrere s unendlich werden, die Substitution $s = \frac{1}{s'}$, $z = \frac{1}{z'}$ an und verfährt dann wie vorhin.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dafs das im Vorigen auseinandergesetzte Verfahren die Reihenentwickelungen der einzelnen Wurzeln auch liefert für den Fall, dafs $\varkappa = 1$ ist, d. h. für Punkte, in denen keine Koincidenz stattfindet. Ebenso liefert es für eine Koincidenzstelle nicht nur die Entwickelungen der $\varkappa$ Wurzeln, die dort gleich werden, sondern auch diejenigen der $n - \varkappa$ Wurzeln, die an der Koincidenz nicht beteiligt sind.

---

§ 8. Beispiele zur Puiseux'schen Methode.

Beispiel 1⁰) Es sei

$$F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right) = a\,(s - s_0)^6 + b\,(s - s_0)^4\,(z - z_0)^3 + c\,(s - s_0)^3 + d\,(z - z_0)^7 = 0.$$

Für $z = z_0$ hat diese Gleichung drei von einander verschiedene Wurzeln

$$s_0 - \sqrt[3]{\frac{c}{a}},\ s_0 - \alpha\sqrt[3]{\frac{c}{a}},\ s_0 - \alpha^2\sqrt[3]{\frac{c}{a}},\ \left(\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)$$

und drei zusammenfallende Wurzeln mit dem gemeinsamen Werte $s = s_0$.

Die Substitution

$$s - s_0 = s', \quad z - z_0 = z'$$

liefert

$$as'^6 + bs'^4 z'^3 + cs'^3 + dz'^7 = 0,$$

woraus sich die zur Bestimmung der Anfangsglieder der Reihenentwickelung der 3 koincidierenden Wurzeln dienende Gleichung 2^0_b) ergiebt:

$$cs'^3 + dz'^7 = 0.$$

Die 2 Glieder des Polynoms dieser Gleichung werden dargestellt durch die Punkte L und K (Fig. 11). Das Polygon hat also nur eine Seite. Setzt man:

$$s' = c_1 \cdot z'^{\mu_1},$$

so ergiebt die graphische Darstellung für μ_1 sogleich den Wert

$$\mu = \frac{7}{3}.$$

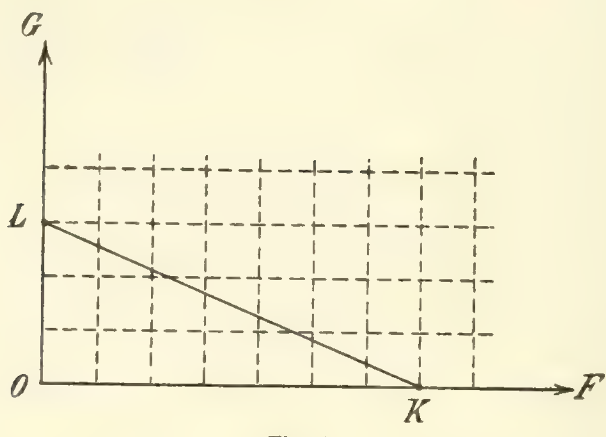


Fig. 11.

Mit Benutzung desselben erhält man für c_1 die Gleichung:

$$c \,.\, c_1^3 z'^7 + d z'^7 = 0,$$

oder nach Division durch z'^7:

$$c c_1^3 + d = 0.$$

Dies giebt für c_1 die 3 von einander verschiedenen Werte:

$$-\sqrt[3]{\frac{d}{c}}, \quad -\alpha\sqrt[3]{\frac{d}{c}}, \quad -\alpha^2\sqrt[3]{\frac{d}{c}}, \left(\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right).$$

Die 3 für $z = z_0$ zusammenfallenden Wurzeln bilden einen 3-gliedrigen Cyklus mit der Entwickelung:

$$s = s_0 + c_1 (z - z_0)^{\frac{7}{3}} + \ldots$$

Vergleicht man diese Ableitung mit der von Herrn Königsberger (Ellipt. Funktionen, pag. 195—198), so sieht man, dafs die Methode Puiseux's, trotzdem sie mehr den Charakter einer Versuchsmethode trägt, unter Umständen viel rascher zum Ziel führt, als die von Herrn Königsberger entwickelte.

Beispiel 2º) Es sei

$$F = 8zs^3 + (1 - z)\,3s + (1 - z) = 0.$$

Diese Gleichung hat, wie in § 5) nachgewiesen wurde, Wurzelkoincidenzen nur für $z = -1,\ 0,\ +1$. Wir diskutieren hier nur die Wurzelkoincidenz für $z = 0$; die in diesem Punkte stattfindenden Wurzelwerte sind

$$s_1 = s_2 = \infty, \quad s_3 = -\frac{1}{3}.$$

Wir setzen zunächst $s = \frac{1}{\sigma}$ und erhalten:

$$8z + \sigma^3 + 3\sigma^2 - z\sigma^3 - 3z\sigma^2 = 0,$$

wo nun für $z = 0$ die Wurzelwerte $\sigma = 0,\ 0_1 = 3$ stattfinden.

Die Substitution $z = z',\ \sigma = \sigma'$ giebt die Gleichung 2_b^0) in der Form:

$$8z' + 3\sigma'^2 = 0.$$

Die zwei für $z = 0$ zusammenfallenden Wurzeln σ', und also auch ihre reciproken Werte s, bilden daher einen 2-gliedrigen Cyklus, d. h. es ist $\mu_1 = \frac{1}{2}$, wie übrigens auch aus der graphischen Darstellung folgt.

Substituiert man

$$\sigma' = c_1 z'^{\frac{1}{2}}$$

in

$$8z' + 3\sigma'^2 = 0,$$

so erhält man für c_1, nach Division durch z', die Gleichung:

$$c_1^2 = -\frac{8}{3}, \quad \text{oder } c_1 = \pm i\sqrt{\frac{8}{3}}.$$

Für die an dem 2-gliedrigen Cyklus teilnehmenden Wurzeln s_1, s_2 ergiebt sich daher die Entwickelung:

$$s_1 = i\sqrt{\frac{3}{8}}\,.\,z^{-\frac{1}{2}} + \ldots,$$

$$s_2 = -i\sqrt{\frac{3}{8}}\,.\,z^{-\frac{1}{2}} + \ldots.$$

Um auch für die Wurzel s_3, die für $z=0$ den Wert $-\frac{1}{3}$ besitzt, die Reihenentwickelung zu gewinnen, setzen wir

$$s=-\frac{1}{3}+s', \quad z=z'$$

und erhalten die Gleichung 2_b^0) in der Form:

$$3s'-\frac{8}{27}z'=0.$$

Es ist also

$$\mu_1=1,$$

und die Substitution

$$s'=c_1 z'$$

giebt für c_1:

$$3c_1 z'-\frac{8}{27}z'=0,$$

d. h.

$$c_1=\frac{8}{81}.$$

Für s_3 gilt daher in der Umgebung von $z=0$ die Entwickelung:

$$s_3=-\frac{1}{3}+\frac{8}{81}z+\cdots$$

Beispiel 3⁰) Es sei

$$F=s^3-3z^2s+2z^3-2iz^2(z-i)^2=0.$$

Diese Gleichung besitzt (siehe § 5) Wurzelkoincidenzen für $z=\infty, 0, 1, i, -1$. Wir betrachten hier nur die in $z=i$ stattfindende Koincidenz $s_1=s_2=i$, $s_3=-2i$.

Setzt man

$$s=i+s', \quad z=i+z',$$

so geht die Grundgleichung über in:

$$s'^3+3i\,.\,s'^2-3z'^2s'-6iz's'+5iz'^2+6z'^3-2iz'^4=0,$$

und die entsprechende Gleichung 2_b^0) lautet:

$$3s'^2-6z's'+5z'^2=0.$$

Die graphische Darstellung (siehe Fig. 12) liefert für die Glieder dieser Gleichung die 3 in gerader Linie liegenden Punkte L, M, K. Das Polygon hat also nur eine Seite; es kann daher auch μ_1 nur einen Wert annehmen, und zwar ist:

$$\mu_1 = \operatorname{tang} \varphi = \frac{2}{2} = 1.$$

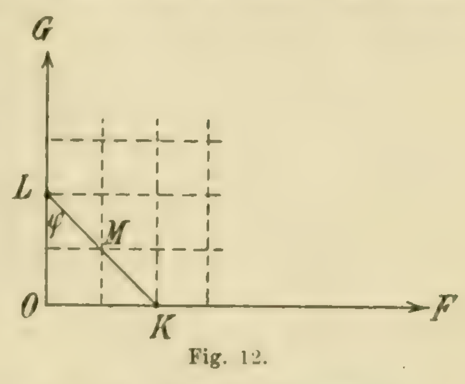


Fig. 12.

Setzt man nun

$$s_1 = c_1 z'^{\mu_1} = c_1 z',$$

so ergiebt sich zur Berechnung von c_1 die Gleichung:

$$c_1^2 z'^2 - 2z' \cdot c_1 z' + \frac{5}{3} z'^2 = 0,$$

oder

$$c_1^2 - 2c_1 = -\frac{5}{3},$$

so daſs

$$c_1 = 1 \pm i\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Aus $\mu_1 = 1$ folgt: die 2 Wurzeln s_1, s_2, die für $z = i$ koincidieren, bilden keinen Cyklus, d. h. es ist $z = i$ ein Doppelpunkt ohne Verzweigung. Die Entwickelungen von s_1, s_2 lauten:

$$s_1 = i + \left(1 + i\sqrt{\frac{2}{3}}\right)(z - i) + \ldots,$$

$$s_2 = i + \left(1 - i\sqrt{\frac{2}{3}}\right)(z - i) + \ldots.$$

Für die Wurzel s_3, die in $z = i$ den Wert $s_3 = -2i$ besitzt, erhält man leicht die Entwickelung:

$$s_3 = -2i - 2(z - i) + \ldots$$

Beispiel 4°) Es sei: (Harkness u. Morley, Theory of Functions pag. 150)

$$(s^2 - z^2)^2 - sz^2 - z^4 = 0.$$

Diese Gleichung hat für $z = 0$ vier gleiche Wurzeln mit dem gemeinsamen Werte $s = 0$. Die Substitution $s = s'$, $z = z'$ läfst die Form der Gleichung ungeändert; es ergiebt sich als Gleichung 2^0_b):

$$s'^4 - 2z's'^2 + z'^2 = 0.$$

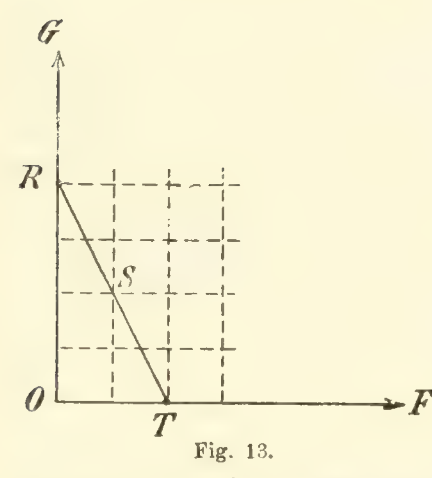


Fig. 13.

Die graphische Darstellung hiervon (Fig. 13) liefert die 3 in gerader Linie liegenden Punkte R, S, T, so dafs:

$$\mu_1 = \text{tang}\,\varphi = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Für c_1 ergiebt die Substitution $s' = c_1 . z'^{\frac{1}{2}}$ die Gleichung:

$$(c_1^2 - 1)^2 = 0,$$

welche für c_1^2 2 Wurzeln mit dem gemeinsamen Werte $c_1^2 = +1$ liefert. Die 4 Wurzeln s_1, s_2, s_3, s_4 der Grundgleichung bilden daher im Punkte $z = 0$ zwei Cyklen mit demselben Anfangsglied $c_1 z'^{\frac{1}{2}}$ $(c_1 = \pm 1)$.

Um diese Cyklen von einander zu trennen, müssen wir weitere Glieder der Reihenentwickelung bestimmen.

Zu dem Zwecke setzen wir in der ursprünglichen Gleichung in s':

$$s' = (c_1 + \zeta_1)\, z'^{\mu_1} = (c_1 + \zeta_1)\, z'^{\frac{1}{2}}, \text{ wo } \zeta_1 = 0 \text{ für } z' = 0.$$

Dies giebt, nach Division durch z'^2:

$$\zeta_1^4 + 4c_1\zeta_1^3 + 4\zeta_1^2 - z'\zeta_1 - c_1 z'^{\frac{1}{2}} - z'^2 = 0,$$

oder, wenn wir noch setzen: $z' = z_1^2$:

$$\zeta_1^4 - 4c_1\zeta_1^3 + 4\zeta_1^2 - z_1^2\zeta_1 - c_1 z_1 - z_1^4 = 0.$$

Die zugehörige Gleichung $2\,b^0$) lautet:

$$4\zeta_1^2 - c_1 z_1 = 0.$$

Setzt man hierin

$$s_1 = c_2 \cdot z'^{\mu_2} = c_2 z_1^{2\mu_2},$$

so liefert die graphische Darstellung (Fig. 14):

$$2\mu_2 = \operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{2}, \text{ d. h. } \mu_2 = \frac{1}{4},$$

und die Gleichung für c_2 wird:

$$4c_2^2 - c_1 = 0,$$

oder

$$4c_1 c_2^2 = c_1^2 = 1,$$

so dafs:

$$c_2 = \frac{1}{2\sqrt{c_1}}.$$

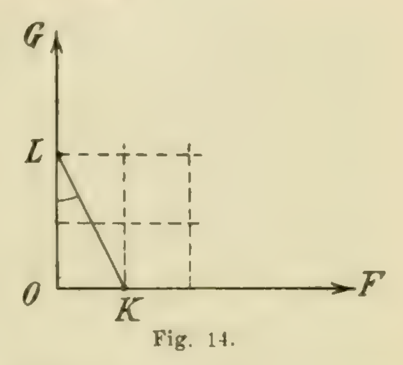


Fig. 14.

In zweiter Annäherung erhalten wir also:

$$s' = c_1 z'^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{c_1}} z'^{\frac{3}{4}} + \ldots$$

und die Reihenentwickelungen der 4 Wurzeln in der Umgebung von $z = 0$ lauten:

$$s_1 = z^{\frac{2}{4}} + \frac{1}{2} z^{\frac{3}{4}} + \ldots,$$

$$s_2 = -z^{\frac{2}{4}} - \frac{1}{2} i z^{\frac{3}{4}} + \ldots,$$

$$s_3 = z^{\frac{2}{4}} - \frac{1}{2} z^{\frac{3}{4}} + \ldots,$$

$$s_4 = -z^{\frac{2}{4}} + \frac{1}{2} i z^{\frac{3}{4}} + \ldots.$$

Der eine Cyklus enthält die Wurzeln s_1 und s_2, der andere die Wurzeln s_3 und s_4.

Die vorigen Beispiele mögen genügen, um die praktische Durchführung der Puiseux'schen Methode in speziellen Fällen zu erläutern.

§ 9. Normalisierung der Grundgleichung.

In den bisherigen Untersuchungen ist über die Grundgleichung:

$$F\binom{n\ \ m}{s,\ z} = \varphi_0\, s^n + \varphi_1\, s^{n-1} + \dots \qquad + \varphi_n$$
$$= \psi_0 \,.\, z^m + \psi_1\, z^{m-1} + \dots \qquad + \psi_m = 0$$

weiter keine Voraussetzung getroffen worden, als die, dafs sie irreducibel sei. Wie wir an speziellen Beispielen gesehen haben, kann dann die durch $F = 0$ definierte algebraische Funktion s von z mehr oder minder komplizierte Singularitäten aufweisen. Es können z. B. Unstetigkeitspunkte mit Wurzelkoincidenzen zusammenfallen, sei es, dafs für einen und denselben Wert von z mehrere Wurzeln s unendlich werden, oder dafs eine Wurzel ∞ wird für einen Wert von z, für den mehrere andere Wurzeln gleiche endliche Werte annehmen. Es können auch Wurzelkoincidenzen, mit oder ohne Verzweigung, mit oder ohne Unstetigkeit, im Unendlichen liegen (für $z = \infty$ stattfinden). Es liegt auf der Hand, dafs solche Singularitäten die Untersuchung der mit ihnen behafteten Funktion s erschweren, und es stellt sich damit zugleich die Aufgabe, die definierende Grundgleichung so umzuformen, dafs die Singularitäten von möglichst einfacher Natur werden. — Ein erster Schritt zur Lösung dieser Aufgabe geschieht durch die Entwickelungen des gegenwärtigen Paragraphen.

In die Grundgleichung $F = 0$ führen wir mit Hilfe der Substitution

$$S.: \qquad s = \frac{s_0 \cdot \eta}{\eta - \eta_0}, \qquad z = \frac{z_0 \cdot \zeta}{\zeta - \zeta_0}$$

zwei neue Variabeln η und ζ ein; η_0 und ζ_0 sollen beliebig sein, s_0 und z_0 sind Parameter, über die wir in geeigneter Weise verfügen werden. Durch diese Substitution S geht $F = 0$, nach Weghebung der Nenner, in eine neue Gleichung

$$\Phi\binom{n\ \ m}{\eta,\ \zeta} = 0,$$

über, wo das Polynom $\Phi = g_0\, \eta^n + g_1\, \eta^{n-1} + \dots \quad + g_n$
$$= h_0\, \zeta^m + h_1\, \zeta^{m-1} + \dots \quad + h_m$$ sei.

Ist $F=0$ irreducibel, so ist auch $\Phi=0$ irreducibel. Wäre nämlich $\Phi=0$ rational zerfällbar, so würde die zu S inverse Substitution:

$$S^{-1}: \quad \eta = \frac{\eta_0 \cdot s}{s - s_0}, \quad \zeta = \frac{\zeta_0 \cdot z}{z - z_0},$$

auf $\Phi=0$ angewendet, umgekehrt wieder eine rationale Zerfällung von $F=0$ liefern.

Die Discriminante von F, wenn s als Funktion von z betrachtet wird, heifse wie bisher D. Betrachtet man z als Funktion von s, so besitzt F eine zweite Discriminante E, die, gleich Null gesetzt, die Werte von s liefert, für welche die Funktion z Wurzelkoincidenzen aufweist. Diese Discriminante E setzt sich aus den Koeffizienten $\psi_0, \psi_1 \ldots \psi_m$ ebenso zusammen, wie D aus $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_n$, und ihr Grad in s ist $\leq 2n(m-1)$.

Ebenso besitzt Φ zwei Discriminanten; sie mögen in entsprechender Bezeichnung Δ und H heifsen.

Den Substitutionsparametern s_0, z_0 legen wir nun folgende Beschränkungen auf:

A°) Beschränkungen für z_0:

I°) z_0 soll weder Wurzel von $\varphi_0 = 0$, noch von $D=0$ sein;

II°) $z = z_0$ soll, als Funktion von s betrachtet, keine mehrfache Wurzel von $F=0$ sein;

III°) $z = z_0$ soll, als Funktion von s betrachtet, in keinem Wurzelsystem $z_1, z_2 \ldots z_m$ vorkommen, in dem zwei oder mehr gleiche Wurzeln z auftreten.

B°) Beschränkungen für s_0:

I°) s_0 soll weder eine Wurzel von $\psi_0 = 0$, noch von $E=0$ sein;

II°) $s = s_0$ soll keine mehrfache Wurzel von $F=0$ sein;

III°) $s = s_0$ soll in keinem Wurzelsystem $s_1, s_2 \ldots s_n$ vorkommen, in dem zwei oder mehr gleiche Wurzeln s auftreten.

C°) Gemeinsame Beschränkung für z_0 und s_0:

Es soll nicht $F\binom{n \quad m}{s_0, z_0} = 0$ sein. —

Die Beschränkungen A°) und B°) schliefsen für s_0, z_0 nur eine endliche Anzahl von Werten aus. Den Beschränkungen A°), B°) und C°) kann man also auf unendlich viele Arten gerecht werden.

Welches ist nun die Wirkung dieser Beschränkungen?

Für $z = z_0$ wird $\zeta = \infty$, für $s = s_0$ wird $\eta = \infty$. Die Beschränkung C°) hat daher zur Folge, dafs für $\zeta = \infty$ kein η unstetig wird, und umgekehrt, dafs für $\eta = \infty$ kein ζ unstetig wird.

Die Beschränkung A°) I°) hat zur Folge, dafs für $\zeta = \infty$ keine Wurzel $\eta = \eta_0$ wird, und keine zwei Wurzeln η einander gleich werden.

Die Beschränkung B°) I°) bewirkt, dafs für $\eta = \infty$ keine Wurzel $\zeta = \zeta_0$ wird, und keine zwei Wurzeln ζ einander gleich werden.

Die Beschränkung B°) II°) hat zur Folge, dafs nie für dasselbe ζ zwei Wurzeln $\eta = \infty$ werden, und die Beschränkung B°) III°) dafs, wenn für ein bestimmtes ζ eine Wurzel $\eta = \infty$ wird, alle übrigen Wurzeln η ungleiche Werte haben.

Die Beschränkungen A°) II°) und III°) bewirken, dafs für keinen Wert von η zwei Wurzeln $\zeta = \infty$ werden, und dafs, wo ein $\zeta = \infty$ wird, die übrigen $m - 1$ Wurzeln ζ alle endlich und ungleich sind.

Bestimmt man daher s_0 und z_0 gemäfs den Bedingungen A°), B°) und C°), so ergeben sich für die durch die Gleichung:

$$\Phi\left(\overset{n}{\eta}, \overset{m}{\zeta}\right) = 0$$

verbundenen, neuen Veränderlichen η und ζ folgende Vereinfachungen funktionen-theoretischer Natur:

I°) In dem unendlich fernen Gebiete der ζ-Ebene hat η weder Unstetigkeiten noch Koincidenzen, also auch keine Verzweigungspunkte; in den im Endlichen gelegenen Gebieten der ζ-Ebene sind Unstetigkeiten und Wurzelkoincidenzen so von einander getrennt, dafs, wo eine Koincidenz eintritt, keine Wurzel unstetig wird, und dort, wo eine Wurzel η

unstetig wird, alle andern Wurzeln endliche, von einander verschiedene Werte haben.

II2) Dasselbe gilt, mutatis mutandis, von ζ, wenn man ζ als Funktion von η betrachtet.

Diesen Vereinfachungen funktionen-theoetischer Natur entsprechen folgende analytischen Vereinfachungen:

Da für $\zeta = \infty$ keine Koincidenz stattfindet, so ist $\varDelta$ in ζ vom höchst möglichen Grade $2m(n-1)$; ebenso ist H in η vom Grade $2n(m-1)$.

Da ferner

$$h_0 + \frac{h_1}{\varphi} + \ldots + \frac{h_m}{\varphi_m} = 0$$

ist, so ist für $\zeta = \infty$:

$$h_0 = 0.$$

Die Wurzeln η von $h_0 = 0$ sind daher die Werte von η, die $\zeta = \infty$ entsprechen; diese Wurzeln sind nach dem Vorigen alle ungleich. Die Gleichung $h_0 = 0$ ist daher in η vom Grade n und hat lauter ungleiche Faktoren.

Analog folgt: $g_0 = 0$ ist in ζ vom Grade m und hat lauter ungleiche Wurzelfaktoren.

$\eta = \infty$ kommt niemals als mehrfache Wurzel vor, heifst: ist für ein bestimmtes ζ: $g_0 = 0$, so ist $g_1 \neq 0$, d. h. kein Divisor von g_0 ist Divisor von g_1.

Analog folgt: kein Divisor von h_0 ist Divisor von h_1.

η wird nie ∞, wenn Koincidenz eintritt, heifst: kein Divisor von g_0 ist Divisor von $\varDelta$; ebenso ergiebt sich: kein Divisor von h_0 ist Divisor von H.

Fassen wir dies Alles zusammen, so haben wir folgende Vereinfachungen analytischer Natur:

In der Gleichung

$$\varPhi\binom{n\ \ m}{\eta, \zeta} = g_0 \cdot \eta^n + g_1 \cdot \eta^{n-1} + \ldots + g_n = 0 \text{ (Discriminante } \varDelta\text{)}$$

oder

$$\varPhi\binom{n\ \ m}{\eta, \zeta} = h_0 \cdot \zeta^m + h_1 \zeta^{m-1} + \ldots + h_m = 0, \text{ (Discriminante } H\text{)}$$

ist:

1°) g_0 vom Grade m in ζ und hat nur ungleiche Wurzelfaktoren. Keiner dieser Faktoren $(\zeta - r)$ ist Divisor von g_1 oder von $\varDelta$. $\varDelta$ selbst ist in ζ vom Grade $2m(n-1)$.

2°) h_0 ist in η vom Grade n und hat nur ungleiche Wurzelfaktoren $\eta - t$. Keiner dieser Faktoren ist Divisor von h_1 oder von H. H selbst ist in η vom Grade $2n(m-1)$.

Dafs und wie die Substitution S mit den Beschränkungen A°), B°) und C°) auch die Form der Reihenentwickelungen der Wurzeln in der Umgebung eines gegebenen Punktes beeinflufst, ist unmittelbar ersichtlich.

Die mit Hilfe der Substitution S und der Bedingungen A°), B°) und C°) aus der Grundgleichung $F=0$ erhaltene Gleichung $\Phi = 0$ nennen wir mit Christoffel eine normalisierte algebraische Gleichung.

Beispiel: Von der Gleichung

$$F\binom{3\quad 1}{s, z} = 8zs^3 + 3(1-z)s + (1-z) = 0$$

haben wir bereits nachgewiesen, dafs von einem numerischen Faktor abgesehen, ihre Discriminante

$$D = z(1-z^2)(z+1)$$

ist, und dafs die Gleichung im Unendlichen keine Wurzelkoincidenz besitzt. Die Wurzelkoincidenzen und die entsprechenden Werte von s sind:

$$\begin{aligned} z = 0: &\quad s = \infty, \infty, -\frac{1}{3}, \\ z = +1: &\quad s = 0, 0, \quad 0, \\ z = -1: &\quad s = 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Soll die Gleichung durch die Substitution S normalisiert werden, so darf, nach A°), I°), der Parameter z_0 keinen der Werte

$$0, +1, -1$$

haben. Die Beschränkungen A°), II°) und III°) sind von selbst erfüllt, da die Grundgleichung vom ersten Grade in z ist.

Für s_0 müssen ausgeschlossen werden:

nach B^{0}.), II^{0}.) und III^{0}.): die Werte: $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, +1, \infty$

nach B^{0}.), I^{0}.): die Wurzeln von $8s^3 - 3s - 1 = 0$.

Wir nehmen $z_0 = \frac{1}{2}$, $s_0 = \frac{1}{2}$; diese Werte gehören nicht zu den eben ausgeschlossenen und erfüllen auch die Beschränkung C^{0}.), da das Polynom

$$F\left(\overset{3}{\frac{1}{2}}, \overset{1}{\frac{1}{2}}\right) = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} + 3\left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4},$$

also $\neq 0$ ist.

Wählen wir ferner für die zu unserer Verfügung stehenden Grössen ζ_0 und η_0 die Werte $\zeta_0 = 1$, $\eta_0 = 1$, so geht die Gleichung

$$F\left(\overset{3}{s}, \overset{1}{z}\right) = 8zs^3 + 3(1-z)s + 1 - z = 0$$

über in

$$\Phi\left(\overset{3}{\eta}, \overset{1}{\zeta}\right) = \eta^3(7\zeta - 10) - 12\eta^2(\zeta - 2) + 9\eta(\zeta - 2) - 2(\zeta - 2) = 0.$$

Diese Gleichung ist normal. Ihre Discriminante Δ ist, wie die wirkliche Ausführung zeigt:

$$\Delta = 2 \cdot 18^2 \cdot \zeta(\zeta - 2)^2(3\zeta - 2),$$

und hat in ζ den höchst möglichen Grad $2m(n-1) = 4$; für $\zeta = \infty$ findet also für η keine Wurzelkoincidenz statt. Da ferner für $\zeta = \infty$

$$7\eta^3 - 12\eta^2 + 9\eta - 2 = 0$$

ist, so wird im Unendlichen auch keine Wurzel η unstetig.

In Endlichen finden für η Koincidenzen statt in den Punkten $\zeta = 0, \frac{2}{3}, 2$, und es ist

für $\zeta = 0$: $\eta = 1, \quad 1, \quad \frac{2}{5}$,

„ $\zeta = \frac{2}{3}$: $\eta = 2, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}$,

„ $\zeta = 2$: $\eta = 0, \quad 0, \quad 0$.

Keine dieser Koincidenzen ist mit einer Unstetigkeit von η verbunden. Eine Unstetigkeit von η tritt ein für für $\zeta = \frac{10}{7}$; dort wird nur eine Wurzel $\eta = \infty$, die zwei anderen haben die Werte:

$$\frac{1}{24}(9 + i\sqrt{15}),\ \ \frac{1}{24}(9 - i\sqrt{15}).$$

Da Φ in ζ vom ersten Grade ist, so sind für ζ als Funktion von η alle Wurzelkoincidenzen ausgeschlossen, also auch jedes Zusammenfallen von Unstetigkeit und Wurzelkoincidenz. $\Phi\left(\overset{3}{\eta}, \overset{1}{\zeta}\right) = 0$ ist also thatsächlich normalisiert.

---

§ 10. Zahl der Verzweigungspunkte bei nur einfachen Koincidenzen.

Die Puiseux'sche Methode ermöglicht es, für jede vorgelegte Grundgleichung, wenn die Lage der Wurzelkoincidenzen ermittelt ist, zu entscheiden, ob ein bestimmter Koincidenzpunkt ein Verzweigungspunkt ist oder nicht. In dem sehr speziellen Falle, dafs sämtliche Koincidenzen einfache sind, läfst sich aber schon durch die blofse Bestimmung der Wurzeln der Discriminante D der Grundgleichung entscheiden, ob ein gegebener Koincidenzpunkt ein Verzweigungspunkt oder ein gewöhnlicher Doppelpunkt ohne Verzweigung ist.

Die Grundgleichung $F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right) = 0$ sei irreducibel und normal im Sinne des vorigen Paragraphen, und es sei $z = \zeta$ ein Punkt, für den zwei Wurzeln s_1, s_2 dieser Gleichung den gemeinsamen Wert $s_1 = s_2 = \sigma$ annehmen. Ist dann:

1º) $z = \zeta$ ein Verzweigungspunkt, in dessen Umgebung der von s_1 und s_2 gebildete Cyklus die Reihenentwickelung:

$$s = \sigma + A_1 (z - \zeta)^{\frac{1}{2}} + A_2 (z - \zeta) + A_3 (z - \zeta)^{\frac{3}{2}} + \ldots$$

besitzt, so ist:

$$s_1 = \sigma + A_1 (z - \zeta)^{\frac{1}{2}} + A_2 (z - \zeta) + A_3 (z - \zeta)^{\frac{3}{2}} + \ldots,$$
$$s_2 = \sigma - A_1 (z - \zeta)^{\frac{1}{2}} + A_2 (z - \zeta) + A_3 (z - \zeta)^{\frac{3}{2}} + \ldots,$$

und daher, immer in der Umgebung des Punktes $z = \zeta$:

$$\Delta = \frac{1}{2}(s_1 - s_2) = A_1 (z - \zeta)^{\frac{1}{2}} + A_3 (z - \zeta)^{\frac{3}{2}} + \ldots,$$

oder allgemein, wenn $A_{2\varkappa+1}$ der erste nicht verschwindende Koeffizient aus der Reihe $A_1, A_3 \ldots$ ist:

1°) $\Delta = (z - \zeta)^{\frac{2\varkappa+1}{2}} \cdot \{B + B_1 (z - \zeta) + \ldots\}$. $(B \neq 0)$

Ist 2°) $z = \zeta$ ein gewöhnlicher Doppelpunkt, so schreiten die Entwickelungen von s_1 und s_2 nach ganzen Potenzen von $z - \zeta$ fort, und es ergiebt sich:

2°) $\Delta = (z - \zeta)^k \{B + B_1 (z - \zeta) + \ldots\}$. $(B \neq 0)$

Infolge unserer Voraussetzungen über $F = 0$ ist $s_1 - s_2 = 2\Delta$ die einzige Wurzeldifferenz, die für $z = \zeta$ schwindet; die Funktionen

$$\frac{F'(s_1, z)}{\Delta}, \quad \frac{F'(s_2, z)}{\Delta}, \quad F'(s_3, z) \,.\, F'(s_4, z) \ldots F'(s_n, z)$$

werden also für $z = \zeta$ weder Null noch unendlich, und das gleiche gilt, gemäfs der in 5°) § 5 gegebenen Darstellung von D, auch von $\frac{D}{\Delta^2}$. Ist $z = \zeta$ ein Verzweigungspunkt, so wird daher für $z = \zeta$:

$$\frac{D}{(z - \zeta)^{2\varkappa+1} \{B + B_1 (z - \zeta) + \ldots\}^2}$$

weder 0 noch ∞; ist $z = \zeta$ kein Verzweigungspunkt, so wird für $z = \zeta$:

$$\frac{D}{(z - \zeta)^{2k} \{B + B_1 (z - \zeta) + \ldots\}^2}$$

weder Null noch unendlich. Hieraus ergiebt sich

Satz I°) Hat die Grundgleichung $F = 0$ nur einfache Wurzelkoincidenzen, so entspricht jedem Verzweigungspunkte $z = \zeta$ ein Faktor $(z - \zeta)^{2\varkappa+1}$, jedem Doppelpunkt $z = \zeta$ ein Faktor $(z - \zeta)^{2k}$ von D. Und umgekehrt:

Enthält D einen Faktor $z - \zeta$, so ist $z = \zeta$ ein Verzweigungspunkt oder ein Doppelpunkt, je nachdem D diesen Faktor zu einer ungeraden oder geraden Potenz enthält.

Aus diesem Satze läfst sich ein für spätere Untersuchungen sehr wichtiges Resultat ableiten. — Ist, unter der Voraussetzung von nur einfachen Koincidenzen,

$$3^0) \qquad D = \text{konst.}\,(z - a_1)^{2\varkappa_1 + 1} \ldots (z - a_v)^{2\varkappa_v + 1}$$
$$. (z - b_1)^{2k_1} \ldots (z - b_t)^{2k_t},$$

so sind $a_1, \ldots a_v$ Verzweigungspunkte, $b_1 \ldots b_t$ Doppelpunkte ohne Verzweigung, und der Grad von D in z beträgt

$$v + 2(\varkappa_1 + \ldots + \varkappa_v + k_1 + \ldots k_t) = v + 2r.$$

Da wir die Grundgleichung als normal angenommen haben, so ist dieser Grad andererseits gleich $2m(n-1)$. Wir haben daher, allerdings vorerst unter der Voraussetzung von nur einfachen Koincidenzen, die aufserordentlich wichtige Beziehung:

$$4^0) \qquad v = 2m(n-1) - 2r.$$

Die Anzahl der Verzweigungspunkte mufs somit, wenn nur einfache Verzweigungspunkte auftreten, stets eine gerade sein.

Kapitel II.

Die Riemann'sche Verzweigungsfläche T.

§ 11. Konstruktion der Fläche T.

Versucht man, die für einwertige Funktionen von z gültigen Sätze und Methoden auf algebraische Funktionen zu übertragen, so tritt sogleich der Umstand hindernd in den Weg, dafs, wenn die Variabele z in der z-Ebene einen Ringweg beschreibt, dieser Ringweg eine algebraische Funktion von z nicht notwendig zu ihrem Anfangswerte zurückführt, mit anderen Worten, dafs einem geschlossenen Wege von z nicht immer ein geschlossener Weg der algebraischen Funktion s in der s-Ebene entspricht.

Sollen die Hilfsmittel der Theorie der einwertigen Funktionen für das Studium der algebraischen Funktion s verwertet werden können, so müssen wir uns daher zuerst ein Gebiet herstellen, innerhalb dessen s sich wie eine eindeutige Funktion des Ortes verhält. Ein solches Gebiet ist die von Riemann eingeführte und nach ihm benannte Riemann'sche Verzweigungsfläche T. — Zu dieser Fläche kann man auf folgendem Wege gelangen.

Die algebraische Funktion s von z sei definiert durch die Gleichung

$$F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right) = 0\,,$$

die wir als irreducibel und normal voraussetzen. — In der Zahlenebene der z denken wir uns die Verzweigungspunkte von s markiert und verbinden dieselben in beliebiger Reihenfolge $\alpha_1 \ldots \alpha_i \ldots \alpha_v$ durch eine sich selbst nicht schneidende, sonst willkürlich gestaltete Linie Σ, die wir

bis ins Unendliche fortsetzen. Wir treffen weiter die Bestimmung, dafs die Variabele z bei ihrer Ortsänderung in der z-Ebene die Linie Σ nicht überschreiten darf, was wir dadurch ausdrücken können, dafs wir uns die z-Ebene längs Σ durchgeschnitten denken. Unterscheiden wir die zwei Ränder dieses Sperrschnittes Σ (bei Cauchy: ligne d'arrêt) als $+$ Rand und $-$ Rand, so kann z von einem Punkte β auf dem $-$ Rand zu dem ihm gegenüberliegenden Punkte γ auf dem $+$ Rand nur mehr auf einem Umwege, etwa l, gelangen (siehe Fig. 15). In der durch Σ modifizierten

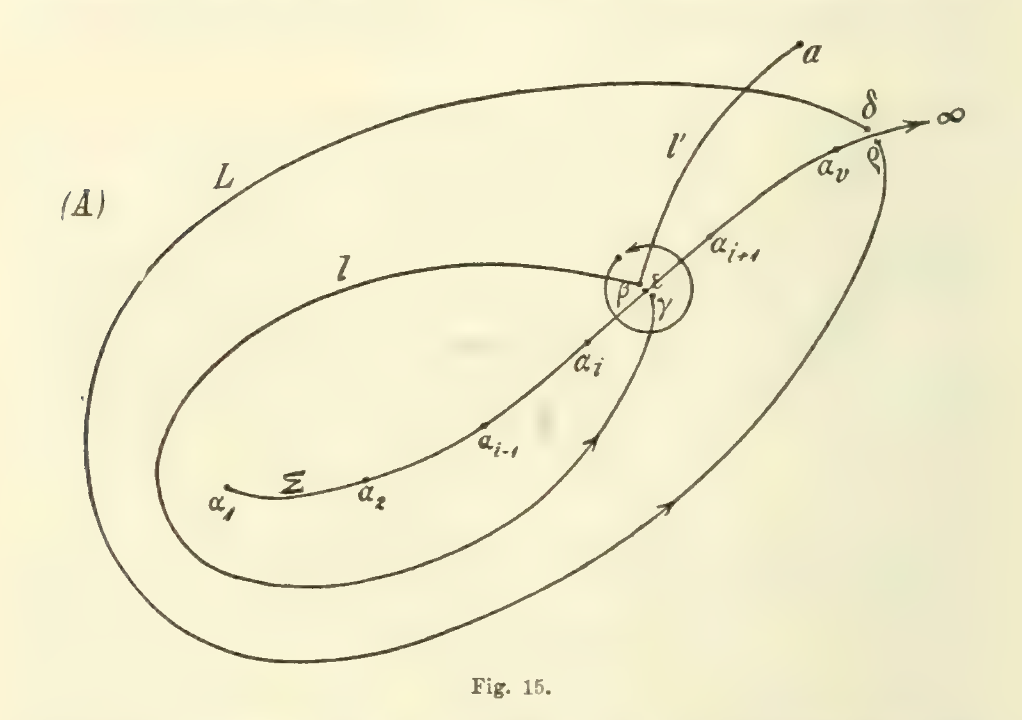


Fig. 15.

z-Ebene sind daher Ringwege, die Verzweigungspunkte umschliefsen, nicht mehr möglich: Jede Wurzel s von $F = 0$ ist in dieser Ebene eindeutig geworden. — Während wir so durch Anlegen des Sperrschnittes Σ die durch die Verzweigungspunkte hervorgerufene Vieldeutigkeit der Wurzeln beseitigt haben, hat sich aber ein anderer Übelstand eingestellt. Vor dem Anlegen von Σ war jede einzelne Wurzel $s_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots n)$ innerhalb der ganzen z-Ebene bis auf vereinzelte Punkte (Pole von s) stetig, und jedem Punkte $z = a$ entsprach ein völlig bestimmter Wert für jedes $s_\varkappa$. Ging man in der noch un-

zerschnittenen z-Ebene vom Punkte $z = a$ mit den dort vorhandenen Werten von $s_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2 \ldots n)$ aus, so lieferte die stetige Fortsetzung dieser Wurzeln längs eines allen singulären Punkten ausweichenden Weges l' im Punkte ε ganz bestimmte Werte der $s_\varkappa$, und die weitere Fortsetzung dieser Wurzeln längs eines Ringweges l (Fig. 15) ergab als Endwerte in ε im allgemeinen eine Permutation

$$s_{i_1}, \ldots s_{i_2}, \ldots s_{i_n}$$

der Anfangswerte $s_\varkappa(\varepsilon)$, (§ 3, Satz IV⁰). Denkt man sich nun die Sperrlinie Σ durch ε hindurchgelegt, so wird ε so zu sagen zerlegt in die zwei an den Rändern von Σ einander gegenüberliegenden Punkte β und γ. Da durch Σ im Innern der z-Ebene, durch welches die Wege l' und l führen, nichts geändert worden ist, so führt der von a nach β gehende Weg l' die n Wurzeln $s_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots n)$ immer noch zu denselben Werten $s_\varkappa(\beta) = s_\varkappa(\varepsilon)$ wie früher, und ebenso führt der Weg l, der jetzt von β nach γ geht, diese Werte $s_\varkappa(\beta)$ in dieselbe Permutation

$$s_{i_1}(\beta), \; s_{i_2}(\beta), \ldots s_{i_n}(\beta)$$

derselben über, wie früher. Bezeichnen wir daher den Wert von $s_\varkappa$ in β mit $\overset{-}{s}_\varkappa$, den durch stetige Fortsetzung bis γ herbeigeführten Endwert von $s_\varkappa$ mit $\overset{+}{s}_\varkappa$, so ist allgemein:

$$\overset{+}{s}_\varkappa = \overset{-}{s}_{i_\varkappa}.$$

An der Sperrlinie Σ sind also wenigstens einzelne Wurzeln unstetig geworden, an Σ findet jetzt ein plötzlicher endlicher Sprung in den beiderseits angelagerten Wurzelwerten statt; jedem Wurzelwerte $\overset{-}{s}_\varkappa$ an dem negativen Rande von Σ liegt ein durch stetige Fortsetzung erhaltener, im allgemeinen verschiedener Wurzelwert $\overset{+}{s}_\varkappa$ an dem $+$ Rande gegenüber. — Nennen wir zwei solche Wurzelwerte einander zugeordnet, so können wir auch sagen: Längs Σ ist jedem Wurzelwerte $\overset{-}{s}_\varkappa$ ein im allgemeinen verschiedener Wurzelwert $\overset{+}{s}_\varkappa$ zugeordnet.

Über diese Zuordnung gelten folgende Sätze:

Satz I.) Vom letzten Verzweigungspunkte α_v bis ins Unendliche ist an Σ überall:

$$\overset{+}{s}_\varkappa = \overset{-}{s}_\varkappa .$$

Beweis: Nimmt man an diesem Schlufsstück von Σ zwei einander gegenüberliegende Punkte δ und ϱ an, so läfst sich jeder in der unzerschnittenen z-Ebene von δ nach ϱ führende Weg L (Fig. 15) auffassen als Ringweg, der die Aufsenfläche A umschliefst. Infolge der vorausgesetzten Normalisierung der Grundgleichung enthält aber A keinen Verzweigungspunkt. Nach Satz II.) § 3 führt daher L jede Wurzel zu ihrem Anfangswert zurück, d. h. es ist $\overset{+}{s}_\varkappa = \overset{-}{s}_\varkappa$, w. z. b. w.

Folgerung: Das Schlufsstück von Σ über α_v hinaus ist für die Erzwingung der Eindeutigkeit der Wurzeln überflüssig.

Satz II.) Auf den zwei Seiten eines Punktes ε von Σ ist die Zuordnung der Wurzeln stets und nur dann verschieden, wenn ε ein Verzweigungspunkt ist.

Beweis: 1.) Wäre zu beiden Seiten eines Verzweigungspunktes ε die Wurzelordnung dieselbe, so würde ein in der unzerschnittenen z-Ebene in hinreichender Nähe um ε führender Ringweg jede Wurzel zu ihrem Anfangswerte zurückführen, was mit der Definition eines Verzweigungspunktes (§ 3) unvereinbar ist.

2.) Ist zu beiden Seiten von ε die Zuordnung der Wurzeln verschieden, so führt ein in der unzerschnittenen z-Ebene in hinreichender Nähe um ε gehender Ringweg mindestens eine Wurzel nicht zu ihrem Anfangswerte zurück; ε ist daher ein Verzweigungspunkt. —

Die Gleichungen:

$$\overset{+}{s}_1 = \overset{-}{s}_{i_1},$$
$$\overset{+}{s}_1 = \overset{-}{s}_{i_2},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\overset{+}{s}_n = \overset{-}{s}_{i_n},$$

welche die Zuordnung der Wurzeln längs einer von α_i bis α_{i+1} reichenden Abteilung Σ_i von Σ angeben, können wir als definierende Gleichungen einer Substitution:

$$1^0) \qquad S_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 \dots n \\ i_1 & i_2 \quad i_n \end{pmatrix}$$

auffassen, durch welche die Wurzeln $s_1, s_2 \dots s_n$ in $s_{i_1}, s_{i_2} \dots s_{i_n}$ übergeführt werden. Bezeichnet man dann die den einzelnen Abteilungen $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots \Sigma_{v-1}$ von Σ entsprechenden Substitutionen mit $S_1, S_2, \dots S_{v-1}$, so liefert $S_i . S_{i-1}^{-1}$, wo allgemein S^{-1} die zu S inverse Substitution bedeutet, diejenige Substitution S_i', die man erhält, wenn man in der unzerschnittenen z-Ebene die Variabele z einen positiven Umlauf um den Verzweigungspunkt α_i ausführen läfst.

Um die durch Anlegung des Sperrschnittes Σ herbeigeführte Unstetigkeit der Wurzeln wieder zu beseitigen, verfährt man mit Riemann folgendermafsen:

Für jede der n Wurzeln $s_1 \dots s_n$ führen wir eine besondere Ebene ein, E_1 für s_1, E_2 für $s_2, \dots E_n$ für s_n, und denken uns in jeder dieser Ebenen tabellarisch die Werte der entsprechenden Wurzel eingetragen. Diese n Ebenen, welche mit ihrem Tabelleninhalt den ganzen Wertvorrat von s als Funktion von z repräsentieren, legen wir so aufeinander, dafs Punkte mit demselben z übereinander liegen, und ziehen in denselben n kongruente Sperrschnitte Σ, in jeder Ebene einen. Zwischen den n Tabellenblättern $E_1 \dots E_n$ stellen wir nun einen stetigen Übergang in folgender Weise her.

In der ursprünglichen, durch den einen Sperrschnitt Σ modifizierten z-Ebene sei die Zuordnung der Wurzeln längs Σ_i charakterisiert durch die Substitution:

$$S_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 \dots n \\ i_1 & i_2 \dots i_n \end{pmatrix}.$$

Bezeichnen wir daher die Teile von $E_1 \dots E_n$, die am $-$ Rande der n Abteilungen Σ_i liegen, mit $\overset{-}{E}_1, \dots \overset{-}{E}_n$, die am $+$ Rande anstofsenden mit $\overset{+}{E}_1, \dots \overset{+}{E}_n$, so findet sich die stetige Fortsetzung der an Σ_i in $\overset{+}{E}_1$ befindlichen Tabellen-

werte in $\overset{-}{E}_{i_1}$, die von $\overset{+}{E}_2$ in $\overset{-}{E}_{i_2}, \ldots$, die von $\overset{+}{E}_n$ in $\overset{-}{E}_{i_n}$. Um eine zusammenhängende, stetig verlaufende Tabellenanordnung der Werte von s zu erhalten, genügt es also, sich längs Σ_i: $\overset{+}{E}_1$ an $\overset{-}{E}_{i_1}$, $\overset{+}{E}_2$ an $\overset{-}{E}_{i_2}, \ldots$, $\overset{+}{E}_n$ an $\overset{-}{E}_{i_n}$ geheftet zu denken, und die entsprechende Heftung auch an den anderen Abteilungen von Σ, gemäfs den dort geltenden Substitutionen S auszuführen. Ist dabei längs $\Sigma_\varkappa$ eine Wurzel s_λ sich selbst zugeordnet, so dafs an $\Sigma_\varkappa : \overset{+}{s}_\lambda = \overset{-}{s}_\lambda$ ist, so hängt das Blatt E_λ, das den gesamten Wertvorrat von s_λ enthält, längs $\Sigma_\varkappa$ mit keinem andern Blatt zusammen; $\Sigma_\varkappa$ wird in diesem Blatte gelöscht.

Die durch Ausführung dieser Heftungen entstandene, überall zusammenhängende n-blättrige Fläche heifst die zur Grundgleichung $F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right) = 0$ gehörige Riemann'sche Fläche T. Die in ihr liegenden Abteilungen von Σ, längs deren wir die Blätter zusammengeheftet haben, nennt man die Verzweigungsschnitte von T.

Um eine klare Anschauung dieser Verzweigungsschnitte zu gewinnen, denken wir uns einen speziellen Fall. Längs Σ_i sei die Zuordnung der Wurzeln charakterisiert durch die Substitution

$$S_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots n \\ 2 & 3 & 1 & 4 \ldots n \end{pmatrix}.$$

In T ist dann $\overset{+}{E}_1$ an $\overset{-}{E}_2$, $\overset{+}{E}_2$ an $\overset{-}{E}_3$, $\overset{+}{E}_3$ an $\overset{-}{E}_1$ geheftet, während in den übrigen Blättern $E_4, \ldots E_n$ die Abteilung Σ_i gelöscht worden ist. Denken wir uns die drei Blätter E_1, E_2, E_3 in dieser Reihenfolge aufeinandergelegt und durch eine Ebene normal zu Σ_i durchgeschnitten, so erhalten wir die Profilzeichnung Fig. 16, in der die Verbindung der

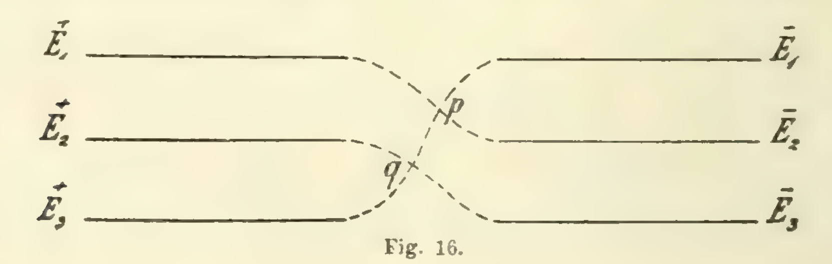


Fig. 16.

Blätter deutlich angegeben ist. Senkrecht zur Zeichenebene haben wir uns, durch die Punkte p und q gehend, zwei Übergangslinien (Brücken) zwischen E_1, E_2, E_3 zu denken, längs welcher die Blätter zusammenhängen, einander durchsetzen. Diese Übergangslinien liegen vorläufig genau übereinander, doch können sie auch mit Beibehaltung ihrer Endpunkte α_i und α_{i+1} so verschoben werden, daſs etwa die Profilzeichnung Fig. 17 sich ergiebt. Wie aus den Figuren ersichtlich, bildet die erste Übergangslinie die Brücke zwischen E_1 und E_2, die zweite zwischen E_2 und E_3.

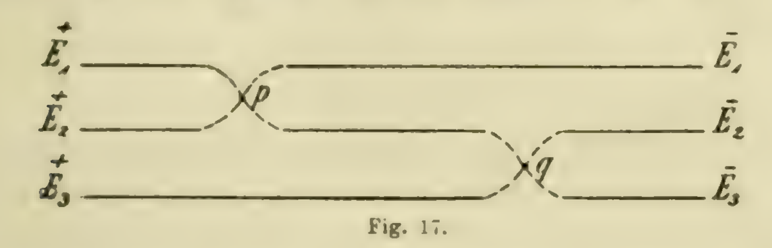


Fig. 17.

Bei der im Vorigen durchgeführten Konstruktion der zu einer bestimmten Grundgleichung $F = 0$ gehörigen Fläche T ist noch manches willkürlich. Willkürlich ist die Gestalt der Sperrlinie zwischen den einzelnen Verzweigungspunkten, willkürlich die Reihenfolge, in der wir die Blätter aufeinander gelegt haben, willkürlich die Reihenfolge, in welcher die Sperrlinie Σ die Verzweigungspunkte verbindet.

Den Umstand, daſs jede Abteilung der Sperrlinie bei Festhaltung ihrer Endpunkte willkürlich verschoben werden kann, wofern dabei kein Verzweigungspunkt überschritten wird und keine Abteilung sich selbst oder eine andere schneidet, benutzen wir, um eine von der vorigen etwas verschiedene Erzeugungsweise der Fläche T abzuleiten. — Wir denken uns die einzelnen Abteilungen von Σ soweit in der z-Ebene nach derselben Seite hin verschoben, bis sie alle einen nicht singulären, sonst beliebigen Punkt z_0 gemein haben. Die Sperrlinie Σ geht dann über in ein System von v Schnitten, die strahlenförmig vom Punkte z_0 aus nach den v Verzweigungspunkten hinlaufen. An der neuen Sperrlinie, d. h. an den strahlenförmig von z_0 nach $\alpha_1 \dots \alpha_v$ hinlaufenden Schnitten $l_1 \dots l_v$, ist zugleich die Zuordnung der Wurzeln eine andere geworden. Trifft ein positiver Umlauf um z_0 die Strahlen $l_1 \dots l_v$ in der Reihenfolge

$$\overset{-}{l}_1 \overset{+}{l}_1 \overset{-}{l}_2 \overset{+}{l}_2 \dots \overset{-}{l}_v \overset{+}{l}_v,$$

so ist die Zuordnung der Wurzeln an l_i charakterisiert durch die Substitution

$$2^\circ) \qquad S_i' = S_i S_{i-1}^{-1},$$

welche auch die Permutation definiert, die ein positiver Umlauf um den Verzweigungspunkt α_i in der unzerschnittenen z-Ebene herbeiführt. — Von den v Substitutionen S' ist die erste $S_1' = S_1$, die letzte $S_v' = S_{v-1}^{-1}$, während sämtliche Substitutionen S', wie aus 2°) unmittelbar folgt, durch die Beziehung

$$3^\circ) \qquad S_1' S_2' \dots S_v' = 1$$

verbunden sind.

Man kann sich nun die Fläche T auch in folgender Weise entstanden denken. In der z-Ebene ziehe man von irgend einem nicht singulären Punkte z_0 aus nach den Verzweigungspunkten $\alpha_1 \dots \alpha_v$ Linien $l_1 \dots l_v$, die weder sich selber noch einander (aufser in z_0) treffen, und schneide die z-Ebene längs dieser Linien auf. Die Aufeinanderfolge dieser l sei so gewählt, dafs ein positiver Umlauf um z_0 die Ränder der Schnitte in der Reihenfolge

$$\overset{-}{l}_1 \overset{+}{l}_1 \overset{-}{l}_2 \overset{+}{l}_2 \dots \overset{-}{l}_v \overset{+}{l}_v,$$

überschreitet. Die den n Wurzeln $s_1 \dots s_n$ entsprechenden Tabellenblätter $E_1, \dots E_n$ lege man nun so aufeinander, dafs die n Schnitte l_i $(i = 1, 2 \dots v)$ sich decken. Die Riemann'sche Fläche T entsteht dann, wenn man längs jedes Schnittes $l_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2 \dots v)$ die Ränder von $E_1 \dots E_n$ so verbindet, wie es die zu $l_\varkappa$ gehörige Substitution $S_\varkappa'$ angiebt. Ist z. B.

$$S_\varkappa' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \dots n \\ \varkappa_1 & \varkappa_2 \dots \varkappa_n \end{pmatrix},$$

so hefte man $\overset{+}{E}_1 \dots \overset{+}{E}_n$ resp. an $\overset{-}{E}_{\varkappa_1} \dots \overset{-}{E}_{\varkappa_n}$, so dafs ein positiver Umlauf um $\alpha_\varkappa$ aus dem Blatte E_λ in das Blatt $E_{\varkappa_\lambda}$ führt.

Die so entstehende Fläche T ist eine zusammenhängende. Wir können dies auch dadurch ausdrücken, dafs wir sagen: die aus $S_1' \dots S_v$ erzeugte Gruppe von Substitutionen ist transitiv.

Eine andere Eigenschaft der Substitutionen S' ist in 3?) enthalten; diese Beziehung ist der Ausdruck dafür, dafs ein in der z-Ebene ausgeführter positiver Umlauf um den Punkt z_0 jede Wurzel zu ihrem Anfangswerte zurückführt, dafs also ein in der Fläche T ausgeführter Umlauf um z_0 schon nach einmaliger Umkreisung von z_0 in das Ausgangsblatt zurückführt.

Die Konstruktion der Fläche T durch Heftung der Blätter $E_1 \ldots E_n$ längs der strahlenförmig vom Punkte z_0 nach den Verzweigungspunkten laufenden Schnitte $l_1 \ldots l_v$ ermöglicht einen bessern Einblick in die Natur der Verzweigungspunkte höherer Ordnung. Angenommen, der Punkt $z = \alpha_i$ sei ein Verzweigungspunkt von der Ordnung $\mu = 6$, so dafs im Punkt α_i diejenigen sechs Blätter von T zusammenhängen, auf denen der Wertinhalt der sechs Wurzeln $s_1 \ldots s_6$ ausgebreitet ist, die sich durch einen positiven Umlauf um $z = \alpha_i$ cyklisch permutieren. Ist

$$S_i' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \ldots n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 7 \ldots n \end{pmatrix}$$

die dem Schnitte l_i zugehörige Substitution, so geht die Variabele z bei jedem Umlauf in das nächstfolgende Blatt, mufs also sechsmal um $z = \alpha_i$ herumlaufen, ehe sie wieder an ihre Ausgangsstelle zurückkehrt. Zu demselben Resultat kommt man aber auch, wenn man fünf einfache Verzweigungspunkte $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_5$ annimmt, deren Verbindungslinien $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_5$ mit z_0 die Substitutionen:

$$S_1'' = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \ldots n \\ 2\,1\,3 \ldots n \end{pmatrix}, \quad S_2'' = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \ldots n \\ 3\,2\,1\,4 \ldots n \end{pmatrix}, \ldots$$

$$S_5'' = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \ldots n \\ 6\,2\,3\,4\,5\,1\,7 \ldots n \end{pmatrix}$$

entsprechen. Geht man von einem Punkte β im Blatte E_1 aus, so führen, wie Fig. 18 zeigt, erst 6 Umläufe wieder in das Blatt E_1 zurück, so dafs der Ringweg sich erst nach 6 Umläufen schliefst. Jeder Umlauf führt dabei z aus einem Blatte in das nächstfolgende Blatt, genau wie bei dem Verzweigungspunkte α_i von der Ordnung 6. Läfst man die 5 Verzweigungspunkte γ, sowie die Schnitte λ sich einander

nähern und schliefslich zusammenfallen, so bleibt alles ungeändert. Wir haben daher den

Satz III.°) Jeder Verzweigungspunkt von der Ordnung μ läfst sich ansehen als äquivalent mit $\mu - 1$ einfachen Verzweigungspunkten.

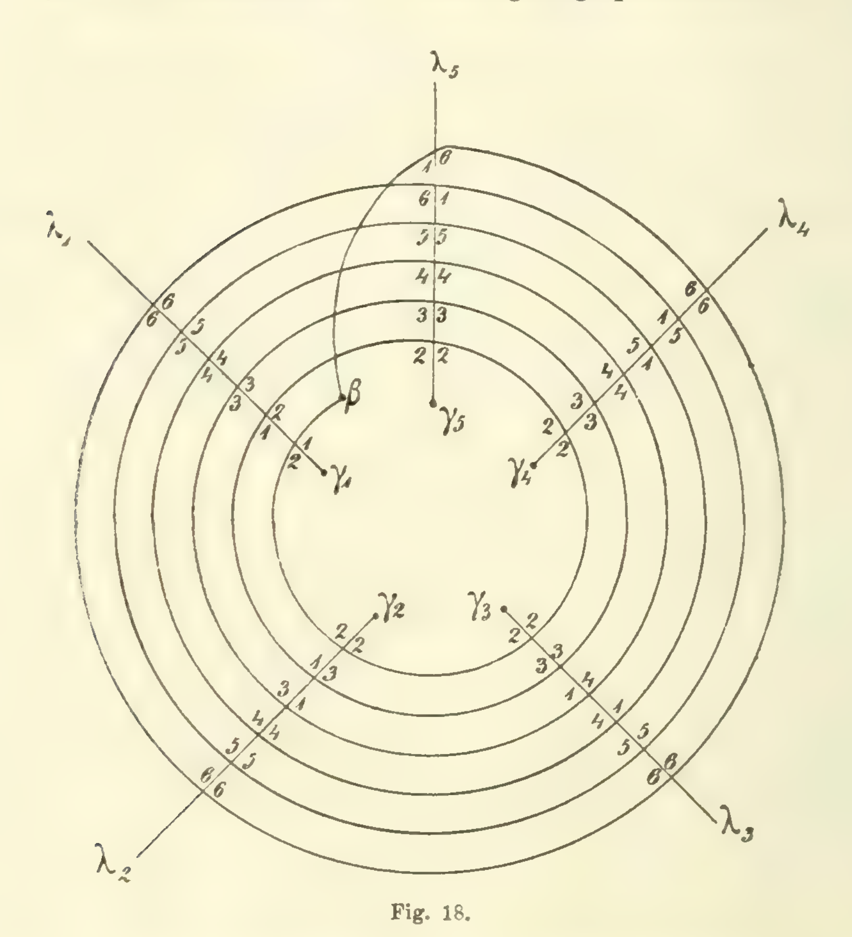


Fig. 18.

Ändert man die Reihenfolge, in der die n Blätter $E_1 \dots E_n$ aufeinandergelegt werden, so wird an dem Tabelleninhalt der Fläche T nichts geändert, dagegen wird die Art, wie sich die Blätter durchsetzen, eine andere. Ist z. B. für $n = 5$ die Zuordnung der Blätter links und rechts vom Verzweigungspunkte α_i gegeben durch die Substitutionen:

$$S_{i-1} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 4\,3\,2\,1\,5 \end{pmatrix}, \quad S_i = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 5\,4\,1\,3\,2 \end{pmatrix},$$

so erhält man, wenn die Blätter in der Reihenfolge 1, 2, 3, 4, 5 aufeinandergelegt werden, für die Verbindung der Blätter links und rechts von α_i die Profilzeichnungen Fig. 19 a) und b).

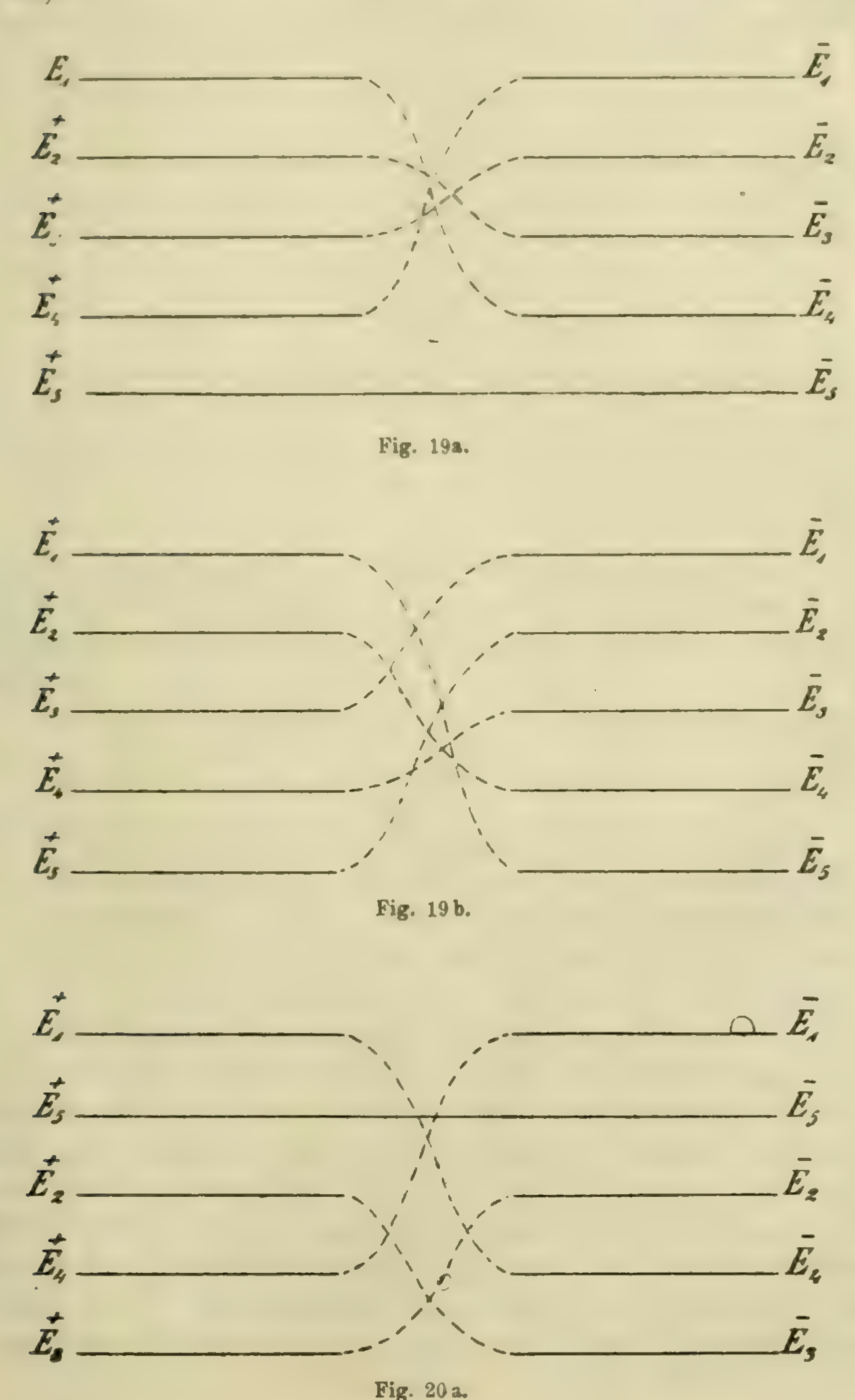


Fig. 19a.

Fig. 19b.

Fig. 20a.

Legt man dagegen die Blätter in der Reihenfolge 1, 5, 2, 4, 3 aufeinander, so ergeben sich die Profilzeichnungen Fig. 20 a) und b). — Die letztere Art der Anordnung der Blätter $E_1 \ldots E_5$ liefert, wenigstens für Σ_i, eine übersichtlichere Zusammenheftung der Blätter, wie die erstere.

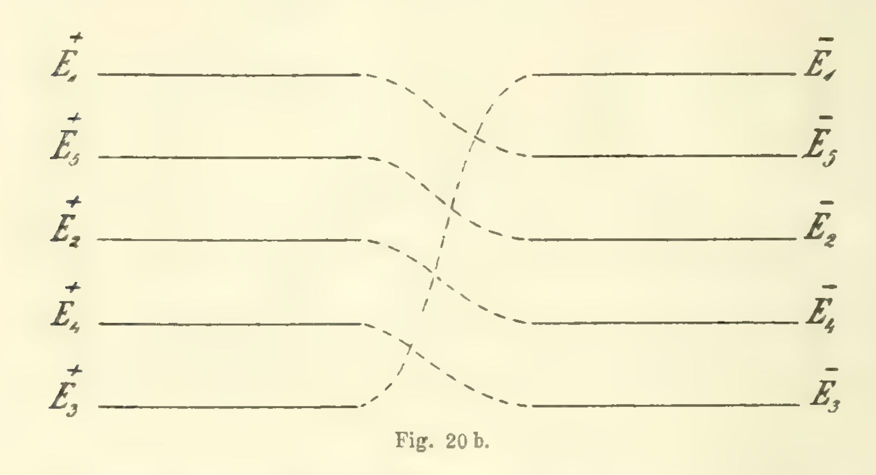


Fig. 20 b.

Den Umstand schliefslich, dafs die Reihenfolge, in welcher der Sperrschnitt Σ die Verzweigungspunkte verbindet, willkürlich ist, werden wir später dazu benutzen, um wenigstens für den Fall nur einfacher Verzweigungspunkte eine übersichtliche Normalform der Fläche T herzustellen.

Die zur Grundgleichung $F = 0$ gehörige Fläche T veranschaulicht in greifbarer Form den Einflufs der Verzweigungspunkte auf die durch einen Ringweg in der z-Ebene herbeigeführte Permutation der Anfangswerte der Wurzeln, von der bereits in § 3 die Rede war.

In der einfachen z-Ebene entspricht jedem Werte von z ein ganz bestimmter Punkt dieser Ebene; in der Fläche T dagegen gehören zu jedem Werte von z n übereinander liegende Punkte, in jedem Blatte von T einer. Ein Punkt von T ist also durch den daselbst vorhandenen Wert von z allein noch nicht bestimmt, sondern erst durch diesen Wert zusammen mit dem dort stattfindenden Werte von s; diese zwei zusammengehörigen, einen Punkt von T vollständig bestimmenden Werte von s und z mögen die K o o r d i n a t e n dieses Punktes heifsen.

Beschreibt z in der z-Ebene einen Weg l, der von einem Punkte $z = a$ nach einem Punkte $z = b$ führt, so entsprechen demselben in T, wenn l allen Verzweigungspunkten ausweicht, n getrennte Wege $l_1 \dots l_n$, deren Anfangspunkte die n übereinander liegenden Punkte $z = a$, und deren Endpunkte die n übereinander liegenden Punkte $z = b$ von T sind. Bezüglich dieser Endpunkte sind 2 Fälle zu unterscheiden:

1º) Der Weg l geht nicht durch die behufs Konstruktion der Fläche T angelegte Sperrlinie Σ hindurch. — In diesem Falle verläuft jeder der n Wege $l_1 \dots l_n$ ganz in dem Blatte, in dem er seinen Ausgang genommen hat.

2º) Der Weg l geht durch Σ hindurch. — In diesem Falle endigen mindestens zwei der Wege $l_1 \dots l_n$ auf einem andern Blatte, als dem, in welchem sie ihren Anfang genommen haben. Schliefst sich z. B. dort, wo l die Linie Σ durchsetzt, das Blatt $E_\varkappa$ an E_λ an, so geht $l_\varkappa$ daselbst aus $E_\varkappa$ in E_λ über. Da aber die n Endpunkte von $l_1 \dots l_n$ so auf die n Blätter von T verteilt sind, dafs in jedem Blatte einer derselben liegt, so mufs es einen weiteren Weg l_μ geben, der ebenfalls sein Ausgangsblatt verläfst und in $E_\varkappa$ endigt.

Fällt der Endpunkt b von l mit dem Anfangspunkte a zusammen, so geht l in einen Ringweg über, und man hat den

Satz IVº) Jedem Ringwege l in der z-Ebene, der allen Verzweigungspunkten ausweicht, entsprechen in T n getrennt verlaufende Wege $l_1 \dots l_n$, die nicht immer Ringwege in T sind. Die Endpunkte von $l_1 \dots l_n$ bilden eine Permutation der Anfangspunkte, und die Endwerte, die $s_1 \dots s_n$ auf $l_1 \dots l_n$ erlangen, bilden dieselbe Permutation ihrer Anfangswerte.

Aus diesem Satze ergiebt sich ferner:

Satz Vº) Ist T zusammenhängend, so kann man in der einfachen z-Ebene stets einen Weg l so wählen, dafs ein beliebiger Weg l_ν aus der Reihe der Wege $l_1 \dots l_n$ in einem beliebigen Blatte E_μ von T endigt.

Von der zu einer irreducibelen Gleichung $F=0$ gehörigen Fläche T haben wir bereits gesagt, dafs sie zusammenhängend ist. Es folgt das schon aus ihrer Konstruktion. Vielleicht ist es jedoch nicht überflüssig, einen formellen Beweis dafür zu liefern, und zu zeigen, dafs auch umgekehrt $F=0$ irreducibel ist, wenn T zusammenhängend ist.

Angenommen, T zerfalle bei irreducibler Grundgleichung $F=0$, d. h. es mögen etwa die Blätter $E_1, \ldots E_\mu$ untereinander, aber nicht mit den andern Blättern $E_{\mu+1}, \ldots E_n$ zusammenhängen. Dann wäre das Produkt

$$(s-s_1)\ldots(s-s_\mu)$$

in der einfachen z-Ebene einwertig, $F=0$ also nicht mehr irreducibel, was der Voraussetzung widerspricht.

Wäre umgekehrt, bei zusammenhängendem T das Produkt

$$(s-s_1)\ldots(s-s_\mu)$$

ein in s und z rationaler Faktor von F, so würde jeder Ringweg l in der z-Ebene diesen Faktor zu seinem Anfangswerte zurückführen, was nach Satz V.) dieses Paragraphen unmöglich ist. — Wir können daher den Doppelsatz aussprechen:

Satz VI.) Ist $F=0$ irreducibel, so ist T zusammenhängend, und umgekehrt: ist T zusammenhängend, so ist $F=0$ irreducibel.

Bevor wir dazu übergehen, an einigen speziellen Beispielen die Konstruktion der Fläche T zu erläutern, bleibt uns noch ein Punkt zu erledigen. — In den bisherigen Ausführungen haben wir, wenn der Wert $z=\infty$ in Betracht kam, stets von dem ∞-fernen Punkte der z-Ebene gesprochen, also angenommen, dafs alle ∞ vielen verschiedenen Richtungen, die von einem Punkte der z-Ebene aus ins Unendliche führen, in demselben Punkte konvergieren. Dieser Annahme liegt die Vorstellung zu Grunde, dafs die z-Ebene im Unendlichen geschlossen, etwa eine Kugel von ∞ grofsem Radius ist. Zu derselben Vorstellung über das Unendlichferne kann man aber auch auf folgendem Wege gelangen. Denkt man sich eine Kugel von beliebigem endlichen Radius r, welche die z-Ebene im Punkte $z=0$ berührt, und projiziert

man alle Punkte der z-Ebene von dem diesem Berührungspunkte S diametral entgegengesetzten Kugelpunkte N aus, so weist jeder Projektionsstrahl einem Punkt der z-Ebene einen und nur einen Punkt der Kugelfläche zu, und die unendlich fernen Gebiete der z-Ebene haben ihre Projektion in dem einen Punkte N.

Diese Projektion der z-Ebene auf die Oberfläche einer Kugel vom Radius r, welche man wohl auch als Transformation mit Hilfe reciproker Radien Vektoren vom Inversionscentrum N aus bezeichnet, führt unmittelbar zu einer Umformung von T, welche diese Fläche der Anschauung näher rückt, indem sie dieselbe durch ein Flächengebilde im dreidimensionalen Raume ersetzt. — Projiziert man jede der n-Ebenen von T auf eine sie im Punkte $z = 0$ berührende Kugelfläche von konstantem Radius, so entsteht ein System von n konzentrischen, unendlich nahe bei einander liegenden Kugelflächen, die sogenannte Riemann'sche Kugelfläche. Die Blätter dieser Fläche durchsetzen sich ebenso wie die ebenen Blätter von T, und den Durchsetzungslinien läfst sich stets eine solche Gestalt geben, dafs sie auf der Kugelfläche Bogen gröfster Kreise sind. Den n ∞ fernen Gebieten von T entsprechen n übereinander liegende Punkte der Kugelfläche, die n ∞-benachbarten Inversionscentren.

Zur Erläuterung der Ausführungen dieses Paragraphen mögen einige Beispiele vorgeführt werden, wobei wir uns an die erste, auf die Zuordnung der Wurzeln an der Sperrlinie Σ sich stützende Konstruktion von T halten.

Beispiel 1º) Die schon früher (§ 4, Beisp. 3º) betrachtete, durch die Gleichung

$$s^2 - (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_{2q}) = 0$$

definierte algebraische Funktion s von z besitzt Verzweigungspunkte an den Stellen $z = \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{2q}$ der z-Ebene. Läfst man Σ die Verzweigungspunkte in dieser Reihenfolge verbinden, so ist längs aller Abteilungen $\Sigma_2, \Sigma_4, \ldots \Sigma_{2q-2}$ von Σ die Zuordnung der Wurzeln gegeben durch die identische Substitution

$$S_{2\varkappa} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (\varkappa = 1, 2 \ldots q - 1),$$

und längs der Abteilungen $\Sigma_1, \Sigma_3, \ldots \Sigma_{2q-1}$ durch die Substitution

$$S_{2\varkappa-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (\varkappa = 1, 2 \ldots q).$$

Um die zur Funktion s gehörige Fläche T zu erhalten, hat man daher nur die zwei Blätter E_1, E_2, welche den Wertevorrat von je einer der zwei Wurzeln s_1, s_2 enthalten, längs $\Sigma_1, \Sigma_3, \ldots \Sigma_{2q-1}$ zusammenzuheften. — Die entstehende Fläche T ist die Fläche der hyperelliptischen Funktionen.

Beispiel 2°) Die durch die Gleichung

$$s^3 + z^3 - 1 = 0$$

definierte Funktion s besitzt Verzweigungspunkte nur an den Stellen $z = 1,\ \alpha, \alpha^2$, $(\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3})$. Aus dem in § 4, Beispiel 5°) Entwickelten folgt, wenn Σ die Verzweigungspunkte in der Reihenfolge $1, \alpha, \alpha^2$ verbindet: längs der von 1 nach α führenden Abteilung Σ_1 von Σ ist die Zuordnung der Wurzeln s_1, s_2, s_3 gegeben durch:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

längs der von α nach α^2 gehenden Abteilung Σ_2 von Σ durch:

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Der Zusammenhang der Blätter E_1, E_2, E_3 wird also längs Σ_1 und Σ_2 dargestellt durch die Profilzeichnungen Fig. 21 a und b.

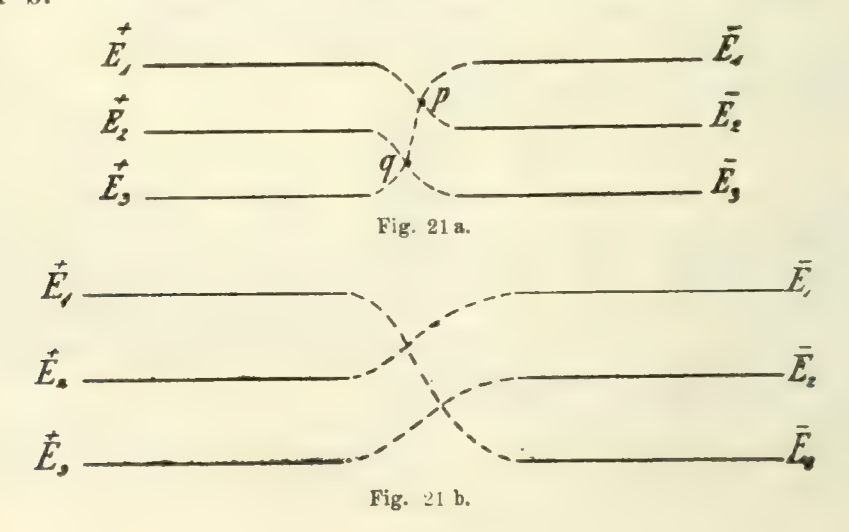


Fig. 21 a.

Fig. 21 b.

Beispiel 3.[2]) Es sei s definiert durch

$$s = \sqrt[3]{\frac{(z-a_1)(z-a_2)}{(z-b_1)(z-b_2)}}.$$

Nach dem früher (§ 4, Beisp. 4[2]) Ausgeführten hat s Verzweigungspunkte an den Stellen $z = a_1, a_2, b_1, b_2$. Verbindet Σ die Verzweigungspunkte in dieser Reihenfolge, so liefern die Substitutionen:

$$S_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}, \quad S_3 = S_1$$

die Zuordnung der Wurzeln längs $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, und die Profilzeichnungen Fig. 21a resp. b stellen den Zusammenhang der Blätter E_1, E_2, E_3 längs $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{b_1 b_2}$, resp. $\overline{a_2 b_1}$ dar.

Verbindet Σ die Verzweigungspunkte in der Reihenfolge a_1, b_1, a_2, b_2, so ist längs der von b_1 bis a_2 gehenden Abteilung von Σ die Zuordnung der Wurzeln durch die identische Substitution gegeben, während den Abteilungen $\overline{a_1 b_1}$, $\overline{a_2 b_2}$ die Substitution

$$S_1 = S_3 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

entspricht. — Die Heftung der Blätter von T ist also bei der letzteren Anordnung der Verzweigungspunkte einfacher, wie bei den ersteren.

Aufgabe: Es soll die zur Grundgleichung

$$8zs^3 + 3(1-z)s + (1-z) = 0$$

gehörige Fläche T konstruiert, und angegeben werden, wie sich die Zusammenheftung der Blätter ändert, wenn die Reihenfolge, in welcher Σ die Verzweigungspunkte $z = -1$, 0, $+1$ verbindet, geändert wird.

---

§ 12. Die algebraischen Funktionen der Klasse; ihre Residuen und Ordnungszahlen.

Die durch die Grundgleichung $F = 0$ definierte algebraische Funktion s von z ist eindeutige Funktion des Ortes in der zu $F = 0$ gehörigen Fläche T; sie ist aber

nicht die einzige Funktion, der diese Eigenschaft zukommt, denn, wie unmittelbar ersichtlich, läfst sich jede rationale Funktion von s und z der Fläche T eindeutig zuordnen. — Wir nennen mit Riemann jede Funktion, die eindeutige Funktion des Ortes in T ist, **verzweigt wie die Fläche T.** Die Gesamtheit dieser **gleichverzweigten** Funktion bildet eine **Klasse,** und wir nennen deshalb eine wie T verzweigte Funktion auch kurz eine **Funktion der Klasse.** — Über diese Funktionen der Klasse, zu denen jedenfalls die rationalen Funktionen von s und z gehören, leiten wir im Folgenden eine Reihe äufserst wichtiger Sätze ab.

Satz I[1]**)** Jede Funktion σ der Klasse, die in T nur zu endlicher Ordnung und nicht unendlich oft unendlich wird, ist eine algebraische Funktion von z.

Beweis: Bezeichnen $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n$ die Werte von σ in n übereinanderliegenden Punkten von T, so ist

$$
\begin{aligned}
f &= (t - \sigma_1)(t - \sigma_2) \ldots (t - \sigma_n) \\
&= t^n + A_1 t^{n-1} + \ldots + A_n,
\end{aligned}
$$

wo t einen fest, aber willkürlich angenommenen Parameter bedeutet, eine in der einfachen z-Ebene einwertige Funktion von z. Die Koeffizienten $A_1, \ldots A_n$ sind daher, wegen der Willkürlichkeit von t, ebenfalls einwertige Funktionen von z, und überdies, infolge unserer Voraussetzung über das Unendlichwerden von σ, sogar rationale Funktionen von z. Die Werte $\sigma_1, \ldots \sigma_n$ sind also Wurzeln einer Gleichung:

$$\sigma^n + A_1 \sigma^{n-1} + \ldots + A_n = 0,$$

in der die Koeffizienten rationale Funktionen von z sind, d. h. σ ist eine algebraische Funktion von z.

Satz II[1]**)** Jede Funktion σ der Klasse, die in T nirgends unendlich wird, ist eine Konstante.

Beweis: Die Koeffizienten $A_1 \ldots A_n$ der algebraischen Gleichung:

$$\sigma^n + A_1 \sigma^{n-1} + \ldots + A_n = 0,$$

welche σ mit z verbindet, sind symmetrische Funktionen der Wurzeln $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ dieser Gleichung. Werden also $\sigma_1 \ldots \sigma_n$

in T nirgends unstetig, so werden auch $A_1 \dots A_n$ nirgends unstetig, und sind daher, als einwertige Funktionen von z, konstant. $\sigma_1 \dots \sigma_n$ sind folglich ebenfalls konstant, und zwar hat σ_1 in E_1 überall denselben konstanten Wert, σ_2 in $E_2, \dots \sigma_n$ in E_n. Da ferner die Blätter $E_1 \dots E_n$ längs der Verzweigungsschnitte alle zusammenhängen und dort stetig in einander übergehen, so haben $\sigma_1 \dots \sigma_n$ denselben konstanten Wert, d. h. σ ist konstant, w. z. b. w.

Satz III°) Jede Funktion σ der Klasse läfst sich, wenn sie in T nur zu endlicher Ordnung und nicht unendlich oft unendlich wird, als rationale Funktion von s und z darstellen.

Beweis: Es seien $\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n$ die Werte von σ in n übereinander liegenden Punkten von T, $s_1, s_2 \dots s_n$ die Werte von s in denselben n Punkten. Bildet man dann*) mit dem fest, aber willkürlich angenommenen Parameter t, die Funktion

1°) $$\psi(t) = \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\sigma_\varkappa}{F'(s_\varkappa, z)} \cdot \frac{F(t, z)}{t - s_\varkappa},$$

wo $F'(s_\varkappa, z)$ den Wert von $\dfrac{\partial F(t, z)}{\partial t}$ für $t = s_\varkappa$ bezeichnet, so ist

2°) $$\psi(s_\varkappa) = \sigma_\varkappa, \qquad (\varkappa = 1, 2 \dots n).$$

Diese Funktion $\psi(t)$ betrachten wir in ihrer Abhängigkeit von t und z.

Wie aus 1°) hervorgeht, ist $\psi(t)$ ganze Funktion von t vom Höchstgrade $n - 1$, läfst sich also darstellen in der Form:

3°) $$\psi(t) = R + R_1 \, . \, t + \dots + R_{n-1} \, . \, t^{n-1},$$

wo $R, R_1 \dots R_n$ Funktionen von z sind. — Aus 2°) und 3°) ergeben sich die n Formeln:

$$\sigma_\varkappa = R + R_1 \, . \, s_\varkappa + \dots + R_{n-1} \, . \, s_\varkappa^{n-1}, \qquad (\varkappa = 1, 2 \dots n),$$

die zusammen die eine Gleichung

4°) $$\sigma = R + R_1 \, . \, s + \dots + R_{n-1} \, . \, s^{n-1}$$

---

*) Christoffel. Brioschi's Annalen Bd. X. 1880.

liefern, in der nur noch die Koeffizienten $R, R_1, \ldots R_{n-1}$ als Funktionen von z zu untersuchen sind.

Läfst man in der einfachen z-Ebene die Variabele z einen geschlossenen Weg beschreiben, der allen Singularitäten von s ausweicht, so bilden (Satz IV⁰, § 11) die Endwerte von $s_1 \ldots s_n$ eine Permutation der Anfangswerte, und die Endwerte der $\sigma_1 \ldots \sigma_n$, gemäfs 2⁰), dieselbe Permutation ihrer Anfangswerte. Die n Summanden

$$\frac{\sigma_\varkappa}{F'(s_\varkappa, z)} \cdot \frac{F(t, z)}{t - s_\varkappa}$$

von $\psi(t)$ erfahren daher durch diesen Ringweg von z nur eine Änderung ihrer Reihenfolge; ihre Summe $\psi(t)$ kehrt also, wenn z zu seinem Ausgangspunkte zurückkehrt, zu ihrem Anfangswerte zurück, d. h. $\psi(t, z)$ ist einwertige Funktion von z. Da dies unabhängig vom Werte von t der Fall ist, so sind auch $R, R_1 \ldots R_{n-1}$ einwertige Funktionen von z, und wegen unserer Voraussetzung über das Unendlichwerden von σ sogar rationale Funktionen von z. — Die Formel 4⁰) stellt also σ dar als ganze Funktion von s und rationale Funktion von z. Bringt man diese Formel in die Gestalt:

$$\sigma = \frac{P + P_1 s + \ldots + P_{n-1} \cdot s^{n-1}}{S},$$

wo $P, P_1 \ldots P_{n-1}, S$ ganze Funktionen von z bedeuten, so kann man mit Hilfe der Grundgleichung $F = 0$ in Zähler und Nenner dieses Ausdrucks höhere Potenzen von s einführen, und erhält σ ausgedrückt als rationale Funktion von s und z. — Damit ist der Satz bewiesen.*)

Gemäfs dem eben bewiesenen Satze ist die Gesamtklasse der algebraischen, wie T verzweigten Funktionen identisch mit der Gesamtklasse aller rationalen Funktionen von s und z.

Es sei nun τ irgend eine algebraische Funktion der Klasse, $z = \alpha$ ein Punkt der Fläche T; in der Umgebung dieses Punktes läfst sich τ in eine Potenzreihe entwickeln,

*) Einen anderen Beweis giebt Herr Prym, Crelle 1877. pag. 251—261.

die nach Potenzen von $(z-\alpha)$ oder $(z-\alpha)^{\frac{1}{\mu}}$ oder $\frac{1}{z}$ fortschreitet, je nachdem der Punkt α ein gewöhnlicher Punkt oder ein Verzweigungspunkt von der Ordnung μ von T ist, oder auf einem der Blätter von T im Unendlichen liegt. Jede dieser Potenzreihen hat ihr bestimmtes Konvergenzgebiet und ist innerhalb dieses Gebietes unbeschränkt integrierbar, d. h. für das Innere eines jeden solchen Konvergenzgebietes erhält man das Integral $J=\int \tau dz$, indem man die entsprechende Reihenentwickelung von τ gliedweise integriert. In diesen Potenzreihen fassen wir besonders die etwa darin vorkommenden Glieder ins Auge, die von der Form

$$\frac{a}{z-\alpha} \text{ oder } \frac{a}{z}$$

sind, und daher zu $\int \tau dz$ einen Beitrag

$$\int \frac{a dz}{z-\alpha} = a \,.\, \log(z-\alpha) \text{ oder } \int \frac{a dz}{z} = a \,.\, \log z$$

liefern. Ein solcher Beitrag wird für $z=\alpha$, resp. $z=\infty$ unendlich; aber diese Art des Unendlichwerdens ist gänzlich verschieden von der der Funktion τ selbst. Während τ nur algebraisch (oder polar) unstetig wird, wird J, sobald die Entwickelung von τ Glieder von der angegebenen Form enthält, für $z=\alpha$ resp. $z=\infty$ unendlich wie $\log(z-\alpha)$ resp. $\log z$, also unendlich wie eine transcendente Funktion. Wir sagen dann: $J=\int \tau dz$ wird für $z=\alpha$, resp. $z=\infty$ logarithmisch unstetig. Zugleich ergiebt sich, dafs J nur dann für $z=\alpha$ oder $z=\infty$ logarithmisch unstetig wird, wenn die Entwickelung von τ in der Umgebung dieser Punkte Glieder mit dem Nenner $(z-\alpha)$ oder z aufweist.

Versteht man nun mit Cauchy unter dem Residuum Res (α) einer Funktion $f(z)$ in einem Punkte $z=\alpha$ den Wert des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} f(z) \,.\, dz,$$

wo der Integrationsweg in positiver Richtung um den Punkt α herumläuft, bis er sich schliefst, so erhält man, wenn man die Reihenentwickelung von $J = \int \tau\, dz$ berücksichtigt, je nachdem $z = \alpha$ ein gewöhnlicher Punkt von T ist, oder ein Verzweigungspunkt von der Ordnung μ, oder auf einem Blatte $E_\varkappa$ im Unendlichen liegt:

$$\operatorname{Res}(\alpha) = a,$$
$$\operatorname{Res}(\alpha) = \mu a,$$
$$\operatorname{Res}(\infty_\varkappa) = -a.$$

Dieselben Gröfsen nennen wir auch die Gewichte G der logarithmischen Unstetigkeiten des Integrals der Klasse $\int \tau\, dz$ an den betreffenden Stellen. Mit Einführung dieser Bezeichnung ist:

1°) für einen gewöhnlichen Punkt $z = \alpha$:

$$\frac{a}{z - \alpha} = \frac{G(\alpha)}{z - \alpha},$$

2°) für einen Verzweigungspunkt $z = \alpha$ von der Ordnung μ:

$$\frac{a}{z - \alpha} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{G(\alpha)}{z - \alpha},$$

3°) für $z = \infty_\varkappa$:

$$\frac{a}{z} = -\frac{G(\infty_\varkappa)}{z}.$$

Bezeichnet man daher mit Jacobi in der Reihenentwickelung $f = \Sigma\, C_r \,.\, \varphi^r$ einer Funktion f nach Potenzen von φ, den Koeffizienten C_r des Gliedes $C_r\, \varphi^r$ symbolisch mit

$$|f|_{\varphi^r}$$

so erhält man, den vorigen drei Fällen entsprechend:

1°) $$\operatorname{Res}(\alpha) = G(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\alpha \tau\, dz = |\tau|_{\frac{1}{z-\alpha}},$$

(α ein gewöhnlicher Punkt von T),

$$2^0)\qquad \operatorname{Res}(\alpha) = G(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\alpha}\tau\, dz = \mu\cdot|\tau|_{\frac{1}{z-\alpha}},$$

(α ein Verzweigungspunkt von der Ordnung μ),

$$3^0)\qquad \operatorname{Res}(\infty_\varkappa) = G(\infty_\varkappa) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\infty_\varkappa}\tau\, dz = -|\tau|_{\frac{1}{z}}.$$

Enthält die Entwickelung von τ an einer Stelle $z = \alpha$ oder $z = \infty_\varkappa$ kein Glied von der Form $\frac{a}{z-\alpha}$ oder $\frac{a}{z}$, so hat τ an dieser Stelle kein Residuum, oder genauer: das Residuum von τ an dieser Stelle ist $= 0$.

Für die Residuen einer algebraischen Funktion τ, oder die Gewichte der logarithmischen Unstetigkeiten des Integrals der Klasse $\int\tau\, dz$ gilt der wichtige:

Satz IV^0) Die Summe aller Residuen einer algebraischen Funktion τ der Klasse ist stets gleich Null,

oder

Die Summe der Gewichte aller logarithmischen Unstetigkeiten eines Integrals $\int\tau\, dz$ der Klasse ist stets gleich Null.

Beweis:*) Um sämtliche Residuenpunkte (Punkte, in denen τ ein Residuum besitzt), von τ in T denken wir uns, in hinreichender Nähe derselben, Kurven angelegt, die sich schliefsen. Ist der Residuenpunkt ein im Endlichen gelegener, schlichter Punkt von T, so läuft die Kurve einmal um ihn herum; ist der Residuenpunkt ein Verzweigungspunkt, in dem μ Blätter von T zusammenhängen, so läuft die Kurve μ-mal um ihn herum, bevor sie sich schliefst; ist endlich der Residuenpunkt der unendlich ferne Punkte $\infty_\varkappa$ des Blattes $E_\varkappa$, so läfst sich für die Kurve ein Kreis $\Gamma_\varkappa$ nehmen, dessen Radius so grofs gewählt ist, dafs sämtliche im Endlichen von $E_\varkappa$ gelegenen Unstetigkeitsstellen und Ver-

*) Dieser Beweis ist einer Vorlesung von Christoffel über Abel'sche Funktionen entnommen.

zweigungspunkte innerhalb desselben liegen. Ein positiver Umlauf um $\infty_\varkappa$ ist dann nichts anderes als ein negativer Umlauf um das Innere $E'_\varkappa$ von $\Gamma_\varkappa$.

Diese Kreise $\Gamma_\varkappa$ denken wir uns nun in allen Blättern von T angelegt und die Fläche T längs derselben durchgeschnitten. Die unendlich fernen Gebiete von T geraten dadurch in Wegfall. Aus dem übrig gebliebenen endlichen Stücke T_1 von T heben wir auch noch alle Unstetigkeitsstellen von τ und alle Verzweigungspunkte heraus (nicht nur diejenigen, die Residuenpunkte von τ sind), indem wir T_1 längs geschlossener Kurven durchschneiden, die diese Punkte in unmittelbarer Nähe umlaufen. Es entsteht dadurch ein endliches, zusammenhängendes Flächenstück T_0, in dem keine Singularitäten und keine Residuenpunkte von τ mehr liegen, und das zu Randkurven die äufseren Ränder aller um die Unstetigkeitspunkte und Verzweigungspunkte laufenden geschlossenen Schnitte und die inneren Ränder der Kreisschnitte $\Gamma_\varkappa$ besitzt. Da nun Randkurven, die keinen Residuenpunkt von τ einschliefsen, zur Residuensumme S von τ keinen Beitrag liefert, so ist

$$S = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{T_0} \tau\, dz\,,$$

wo die Integration sich in positiver Richtung über alle Randkurven von T_0 erstreckt. Um dieses Integral ausführen zu können, denken wir uns T_0 auch noch durchgeschnitten längs aller Verzweigungslinien, in denen die Blätter $E_1 \dots E_n$ zusammenhängen. T_0 zerfällt dadurch in n einblättrige, endliche Stücke $E_1^0 \dots E_n^0$, innerhalb deren keine Singularitäten von τ mehr vorkommen. Für ein jedes solches Stück $E_\varkappa^0$ ist daher, nach einem Satze von Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{E_\varkappa^0} \tau\, dz = 0\,,$$

und folglich auch

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{\varkappa=1}^{n} \int\limits_{E_\varkappa^0} \tau\, dz = 0\,.$$

Diese Integralsumme setzt sich aus zwei Beträgen zusammen: der eine Summand ist

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{T_0}\tau\, dz = -S,$$

der andere rührt von den Rändern der Verzweigungsschnitte her und ist, wie man leicht einsieht, gleich Null. Man erhält daher schliefslich:

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{\varkappa=1}^{n}\int\limits_{E_\varkappa^0}\tau\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{T_0}\tau\, dz = -S = 0, \text{ d. h. } S = 0.$$

Aus Satz IV⁰) ergiebt sich:

Die Anzahl der Residuen einer algebraischen Funktion der Klasse ist entweder $= 0$ oder > 1, nie $= 1$. Ist speziell die Anzahl der Residuen gleich 2, so müssen diese Residuen entgegengesetzt gleich sein. — Dasselbe gilt von den den Residuen gleichen Gewichten.

Dieses Resultat ist die Erweiterung eines Satzes aus der Lehre der einwertigen, doppelperiodischen Funktionen.

Für die algebraische Funktion s von z haben wir früher bewiesen, dafs sie als Funktion von z, d. h. in der Fläche T, nur eine endliche Anzahl von Unstetigkeitsstellen besitzt und in diesen Stellen nur zu endlicher Ordnung ∞ wird. Dies überträgt sich, auf Grund der Sätze dieses Paragraphen, unmittelbar auf jede algebraische Funktion τ der Klasse und gilt also auch von der Funktion $\frac{1}{\tau}$. Die Unstetigkeitsstellen von $\frac{1}{\tau}$ sind aber die Nullpunkte von τ; wir können somit auch sagen: jede algebraische Funktion τ der Klasse besitzt in T nur eine endliche Anzahl von Nullpunkten und wird in diesen Punkten nur zu endlicher Ordnung Null.

Wir definieren nun: als unendlich kleine Gröfse erster Ordnung sehen wir in einem gewöhnlichen Punkte $z = z_0$ von T die Gröfse:

$$z - z_0,$$

in einem Verzweigungspunkte $z=\zeta$ von der Ordnung μ die Gröfse

$$(z-\zeta)^{\frac{1}{\mu}},$$

für $z=\infty$ die Gröfse $\qquad \frac{1}{z} \qquad$ an.

Ist dann:

$$\text{für } z=z_0: \quad \tau=(z-z_0)^{\varkappa}[A+A_1(z-z_0)+\ldots],$$

$$\text{„} \quad z=\zeta: \quad \tau=(z-\zeta)^{\frac{\lambda}{\mu}}[A+A_1(z-\zeta)^{\frac{1}{\mu}}+\ldots],$$

$$\text{„} \quad z=\infty: \quad \tau=\left(\frac{1}{z}\right)^{\nu}[A+\frac{A_1}{z}+\ldots],$$

wo die $A\neq 0$ und die Exponenten $\varkappa, \lambda, \nu$ positive oder negative ganze Zahlen sind, so nennen wir $\varkappa, \lambda, \nu$ die Ordnungszahlen von τ in den Punkten $z=z_0, \zeta, \infty$ und sagen: τ wird in diesen Punkten 0 oder ∞ zu den Ordnungen $\varkappa, \lambda, \nu$, je nachdem diese Ordnungszahlen positiv oder negativ sind.

Es gilt nun der

Satz V.[0]) Die Summe der Ordnungszahlen einer algebraischen Funktion τ der Klasse ist stets gleich Null.

Beweis: Die Funktion $\tau_1=\frac{d\log\tau}{dz}=\frac{1}{\tau}\cdot\frac{d\tau}{dz}$ ist eine algebraische Funktion der Klasse; ihre Entwickelungen in z_0, ζ, ∞ lauten:

$$\text{in } z=z_0: \quad \tau_1=\frac{\varkappa}{z-z_0}+\frac{A_1+2A_2(z-z_0)+\ldots}{A+A_1(z-z_0)+\ldots},$$

$$\text{in } z=\zeta: \quad \tau_1=\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{1}{z-\zeta}+\frac{\frac{1}{\mu}\cdot A_1(z-\zeta)^{\frac{1-\mu}{\mu}}+\ldots}{A+A_1(z-\zeta)^{\frac{1}{\mu}}+\ldots},$$

$$\text{in } z=\infty: \quad \tau_1=-\frac{\nu}{z}+\frac{-\frac{A_1}{z^2}+\ldots}{A+\frac{A_1}{z}+\ldots}.$$

Die Ordnungszahlen von $\varkappa, \lambda, \nu$ von τ in den Punkten z_0, ζ, ∞ sind also zugleich Residuen von τ_1 an diesen Stellen, und aufserhalb der Null- und Unstetigkeitspunkte von τ besitzt τ_1 kein Residuum. Die Summe aller Ordnungszahlen von τ ist daher gleich der Summe der Residuen von τ_1 in T, d. h. nach Satz IV⁰), gleich Null.

Da einem Nullpunkte von τ eine positive, einem Unstetigkeitspunkte dieser Funktion eine negative Ordnungszahl entspricht, so ist nach dem vorigen Satze die Summe der Ordnungen, zu denen τ in der Fläche T Null wird, gleich der Summe der Ordnungen, zu denen τ in T gleich ∞ wird. Diese für ein gegebenes τ konstante Summe der Ordnungen des Unendlichwerdens heifst die Ordnung der Funktion τ.

Wird τ in einem Punkte $z = z_0$ von T gleich 0^k resp. ∞^k, so werden wir späterhin wohl auch sagen: in dem Punkte $z = z_0$ liegen k Null- resp. Unstetigkeitspunkte erster Ordnung von τ vereinigt. Mit Anwendung dieser Ausdrucksweise läfst sich die Ordnung q von τ auch wie folgt definieren:

Die Ordnung q einer algebraischen Funktion τ der Klasse ist gleich der Anzahl der vereinigt oder getrennt liegenden Punkte von T, in denen τ zur ersten Ordnung unendlich wird.

Unter Benutzung derselben Ausdrucksweise nimmt Satz V⁰) die Form an:

Satz V⁰ₐ) Eine algebraische Funktion τ der Klasse wird in T ebenso oft Null wie unendlich.

Beachtet man schliefslich, dafs die Funktion $\tau - a$ ($a =$ constans) an denselben Stellen und zu derselben Ordnung wie τ unendlich wird, also dieselbe Ordnung wie τ besitzt, so ergiebt sich der

Satz VI⁰) Eine algebraische Funktion τ der Klasse von der Ordnung q nimmt jeden bestimmten konstanten Wert a in q vereinigt oder getrennt liegenden Punkten von T an.

---

§ 13. Beziehungen zwischen algebraischen Funktionen der Klasse.

Bis jetzt sind die durch die Grundgleichung $F\binom{n\ m}{s, z} = 0$ verbundenen Funktionen s und z der Klasse als Fundamentalfunktionen der Klasse angesehen worden, durch die sich jede Funktion x der Klasse*) rational ausdrücken läfst. Wir nehmen nun irgend zwei andere Funktionen der Klasse S und Z, von den Ordnungen μ und ν, und untersuchen die Frage, ob nicht, wie s und z, so auch S und Z durch eine algebraische Gleichung verbunden sind, und ob irgend eine Funktion der Klasse sich auch durch S und Z darstellen läfst. Die Antwort wird eine bejahende sein.

Wir untersuchen zuerst S als Funktion von Z.

Zu dem Zwecke denken wir uns Z als komplexe Variabele in einer Z-Ebene, und sehen nach, wie S sich ändert, wenn Z in dieser Z-Ebene Ringwege durchläuft. — Jedem Punkte $Z = A$ der Z-Ebene entsprechen ν Punkte der Fläche T, in denen Z denselben Wert A besitzt. Diese ν Punkte liegen im allgemeinen getrennt in T, und es fallen nur dann mehrere von ihnen an einer bestimmten Stelle von T zusammen, wenn an dieser Stelle die Differenz $Z - A$ zu höherer Ordnung als der ersten Null wird. Es seien

$$A_1, A_2, \ldots A_k$$

diejenigen Punkte der Z-Ebene, denen weniger als ν Punkte von T entsprechen. Läfst man dann Z in der Z-Ebene einen Ringweg l beschreiben, der allen Punkten $A_1 \ldots A_k$ ausweicht, so entsprechen ihm in T ν Wege $l_1 \ldots l_\nu$, die allen Punkten ausweichen, in denen Z einen der Werte $A_1 \ldots A_k$ besitzt. Diese ν Wege verlaufen also in T völlig getrennt und schneiden sich nicht: ihre Endpunkte bilden auf jeden Fall eine Permutation ihrer Anfangspunkte.

Sind jetzt $$S_1, S_2, \ldots S_\nu$$

die Werte von S in den ν Punkten $Z = A$ von T, so bilden wir das Polynom:

$$\begin{aligned}\psi(t) &= (t - S_1)(t - S_2) \ldots \qquad (t - S_\nu) \\ &= t^\nu + P_1 \cdot t^{\nu-1} + P_2 \cdot t^{\nu-2} + \ldots + P_\nu,\end{aligned}$$

---

*) Unter einer Funktion der Klasse verstehen wir von hier ab immer eine algebraische Funktion der Klasse. —

wo t ein verfügbarer Parameter ist. Läfst man Z in der Z-Ebene einen Ringweg l durchlaufen, der allen Punkten $A_1 \dots A_k$ ausweicht, so bilden die Endpunkte der diesem Ringwege entsprechenden Wege $l_1 \dots l_\nu$ in T eine Permutation ihrer Anfangspunkte, und die Endwerte, die S in den Endpunkten dieser Wege erlangt, bilden dieselbe Permutation der Anfangswerte $S_1, \dots S_\nu$. Der Ringweg l von Z führt also $\psi(t)$ zu seinem Anfangswerte zurück, d. h. $\psi(t)$ ist einwertige Funktion von Z, und dasselbe gilt, da t willkürlich ist, auch von $P_1, \dots P_\nu$. Da ferner S als Funktion der Klasse in T nur zu endlicher Ordnung und nicht unendlich oft unendlich wird, so gilt dies auch von $\psi(t)$. Als einwertige Funktion von Z ist daher $\psi(t)$ rationale Funktion von Z, und ebenso sind $P_1, \dots P_\nu$ rational in Z. Setzt man

$$P_1 = \frac{Q_1}{Q}, \dots P_\nu = \frac{Q_\nu}{Q},$$

wo Q, $Q_1 \dots Q_\nu$ ganze Funktionen von Z sind, so erhält man für $\psi(t)$ den Ausdruck:

$$\psi(t) = \frac{Q \cdot t^\nu + Q_1 t^{\nu-1} + \dots \quad + Q_\nu}{Q},$$

und es sind folglich $S_1 \dots S_\nu$ die Wurzeln einer algebraischen Gleichung:

$$Q \cdot S^\nu + Q_1 \cdot S^{\nu-1} + \dots \quad + Q_\nu = 0.$$

Berücksichtigt man schliefslich, dafs S, als Funktion der Klasse von der Ordnung μ, denselben Wert in μ Punkten von T annimmt, dafs also einem Werte von S μ Werte von Z entsprechen, so ergiebt sich der

Satz I⁰) Sind S und Z zwei beliebige Funktionen der Klasse von den Ordnungen μ und ν, so besteht zwischen ihnen stets eine algebraische Gleichung von der Form:

$$\text{I}^0) \qquad \Psi\left(\overset{\nu}{S}, \overset{\mu}{Z}\right) = 0.$$

Bemerkung: Sind

$$S = R_1(s, z), \; Z = R_2(s, z)$$

die Gleichungen, welche S und Z rational durch s und z ausdrücken, so läfst sich die Gleichung $\Psi = 0$ auffassen als Resultat der Elimination von s und z zwischen den drei Gleichungen $S = R_1$, $Z = R_2$, $F = 0$. Näheres hierüber in Kap. V.

Die Grundgleichung $F\binom{n\ m}{s, z} = 0$, von der wir ausgegangen sind, war irreducibel. Ist dies auch bei der Gleichung I⁰) der Fall? — In dieser Beziehung gilt der

Satz II⁰) Die Gleichung I⁰) ist stets und nur dann irreducibel, wenn es mindestens einen Wert Z_0 von Z giebt, für den die ν entsprechenden Werte $S_1, \ldots S_\nu$ von S ungleich sind.

Beweis 1⁰) Es seien für $Z = Z_0$ die Werte $S_1 \ldots S_\nu$ alle von einander verschieden. Wir zerlegen dann das Polynom $\psi(t) = (t - S_1) \ldots (t - S_\nu)$ auf beliebige Weise in zwei Faktoren:

$$\psi(t) = \psi_1(t) \cdot \psi_2(t),$$

wo
$$\psi_1(t) = (t - S_1) \ldots (t - S_\varkappa),$$
$$\psi_2(t) = (t - S_{\varkappa+1}) \ldots (t - S_\lambda) \ldots (t - S_\nu)$$

sei, und untersuchen, ob ein beliebiger Ringweg in der Z-Ebene jeden dieser Faktoren wieder zu seinem Anfangswerte zurückführt.

In der Fläche T legen wir einen Weg l_1 an, der von dem Punkte (S_1, Z_0) ausgeht, allen Punkten von T ausweicht, in denen Z einen der früher erwähnten Werte $A_1 \ldots A_k$ annimmt, und in (S_λ, Z_0) endigt. Diesem Wege entspricht in der Z-Ebene ein Ringweg l, der vom Punkte Z_0 ausgeht, allen Punkten $A_1 \ldots A_k$ ausweicht und wieder in Z_0 endigt. Diesem Ringwege hinwieder entsprechen in T, aufser l_1 noch weitere $\nu - 1$ Wege $l_2 \ldots l_\nu$. Der Ringweg l führt dann $t - S_1$ über in $t - S_\lambda$, während die anderen Wurzelfaktoren von $\psi(t)$ auf eine nicht näher bestimmte Weise ihre Reihenfolge vertauschen. Der Endwert von $\psi_1(t)$ enthält also jedenfalls einen Faktor $t - S_\lambda$, den der Anfangswert nicht hatte. Der Ringweg l in der Z-Ebene führt daher $\psi_1(t)$ nicht zu seinem Anfangswerte zurück, d. h. kein Faktor $\psi_1(t)$ von $\psi(t)$ ist einwertige Funktion

von Z, oder $\psi(t)$ ist irreducibel. Die Gleichung I⁰) ist folglich ebenfalls irreducibel.

2⁰) Für jeden Wert von Z seien zwei oder mehr Werte aus der Reihe $S_1 \dots S_\nu$ einander gleich. — In diesem Falle besitzen

$$\psi(t) = t^\nu + P_1 t^{\nu-1} + \dots \qquad + P_\nu$$

und $$\psi'(t) = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \nu t^{\nu-1} + (\nu - 1) P_1 \cdot t^{\nu-2} + \dots + P_{\nu-1}$$

einen gemeinsamen Teiler, dessen Grad in t jedenfalls $< \nu$ ist. Dieser Teiler

$$\frac{\psi(t)}{\psi'(t)} = \frac{t^\nu + P^1 t^{\nu-1} + \dots + P_\nu}{\nu t^{\nu-1} + \dots \qquad + P_{\nu-1}}$$

ist ganze Funktion von t und, da $P_1 \dots P_\nu$ rationale Funktionen von Z sind, ebenfalls rationale Funktion von Z. $\psi(t)$ ist also rational zerfällbar, d. h. die Gleichung I⁰) ist nicht irreducibel.

Damit ist Satz II⁰) bewiesen.

Ist die Gleichung I⁰) nicht irreducibel, so entsteht die Frage, in welcher Weise die irreducibeln Faktoren des Gleichungspolynoms $\Psi(S, Z)$ oder $\psi = \frac{\Psi}{Q}$ in dasselbe eingehen. Die Antwort hierauf liefert der

Satz III⁰) Ist die Gleichung I⁰) nicht irreducibel, so ist ihr Polynom eine ganze Potenz eines irreducibeln Polynoms.

Beweis: Es sei, in seine irreducibeln Faktoren zerlegt:

$$\psi(t) = \psi_1 \cdot \psi_2 \dots\dots \psi_q, \qquad (q > 1)$$

und

$$\psi_1 = (t - S_1) \dots\dots (t - S_\varkappa),$$
$$\psi_2 = (t - S_{\varkappa+1}) \dots (t - S_\lambda) \dots (t - S_\varrho),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi_q = (t - S_{\sigma-1}) \dots\dots\dots\dots (t - S_\nu).$$

Wie aus dem Beweis des vorigen Satzes hervorgeht, läſst sich in der Z-Ebene stets ein Ringweg l so anlegen, daſs S_1 in S_λ, also irgend ein Wurzelfaktor $t - S_1$ von ψ_1 in

einen beliebigen Wurzelfaktor $t - S_\lambda$ von ψ_2 übergeht. Da nach Voraussetzung ψ_1 und ψ_2 irreducibel sind und die höchse Potenz von t in ψ_1 und ψ_2 den Koeffizienten 1 hat, so mufs daher ψ_1 identisch mit ψ_2 sein. Durch Wiederholung dieser Schlufsweise ergiebt sich, dafs ψ_1 mit allen übrigen irreducibeln Faktoren von $\psi(t)$ identisch ist, dafs also

$$\psi = \psi_1^q$$

ist. Denkt man sich nun $\psi_1(t)$ nach Potenzen von t geordnet:

$$\psi_1(t) = t^\varkappa + R_1 \,.\, t^{\varkappa-1} + \ldots + R_\varkappa,$$

und die rationalen Funktionen $R_1 \ldots R_\varkappa$ von Z auf den gemeinsamen Nenner M gebracht:

$$R_1 = \frac{M_1}{M}, \ldots\, R_\varkappa = \frac{M_\varkappa}{M},$$

so erhält man:

$$\psi_1(t) = \frac{M \,.\, t^\varkappa + M_1 \,.\, t^{\varkappa-1} + \ldots + M_\varkappa}{M} = \frac{\Phi\left(\overset{\varkappa}{t}, \overset{\lambda}{Z}\right)}{M},$$

$$\psi(t) = \frac{\left[\Phi\left(\overset{\varkappa}{t}, \overset{\lambda}{Z}\right)\right]^q}{M^q},$$

wo λ den höchsten Grad bezeichnet, zu dem die ganzen Funktionen $M, M_1 \ldots M_\varkappa$ von Z in Z ansteigen. Hieraus ergiebt sich schliefslich

$$\text{II}^0) \qquad \Psi\left(\overset{\nu}{S}, \overset{\mu}{Z}\right) = \left[\Phi\left(\overset{\varkappa}{S}, \overset{\lambda}{Z}\right)\right]^q, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Zwischen je zwei algebraischen Funktionen der Klasse S und Z von den Ordnungen μ und ν besteht also auf jeden Fall eine irreducibele algebraische Gleichung. Giebt es einen Wert von Z für den die ν entsprechenden Werte von S ungleich sind, so ist diese Gleichung in S vom Grade ν, in Z vom Grade μ. Giebt es keinen solchen Wert von Z, so ist die zwischen S und Z bestehende irreducibele Gleichung in S und Z nicht mehr von den Graden ν und μ, sondern von den Graden

$$\varkappa = \frac{\nu}{q}, \quad \lambda = \frac{\mu}{q},$$

wo q eine ganze Zahl bedeutet, die > 1, im allgemeinen nicht näher bestimmt ist und in ν und μ ohne Rest aufgeht.

An Satz III°) schliefsen sich unmittelbar folgende Bemerkungen an:

1°) Sind ν und μ relative Primzahlen, so ist $q = 1$; die S und Z verbindende irreducibele Gleichung ist dann in S vom Grade ν, in Z vom Grade μ.

2°) Ist die zwischen S und Z bestehende irreducibele Gleichung nicht von den Graden ν und μ, und ist aufserdem eine dieser Zahlen, etwa ν, eine absolute Primzahl, so mufs $q = \nu$ sein. Es ist dann

$$\psi(t) = (t - S_1)^\nu, \text{ d. h. } S_1 = S_2 = \ldots = S_\nu.$$

In diesem Falle ist S einwertige Funktion von Z, und da sie als algebraische Funktion von Z nur zu endlicher Ordnung und nicht unendlich oft unendlich wird, auch rationale Funktion von Z. — Will man diesen Fall wirklich konstruieren, so genügt es, für Z irgend eine Funktion der Klasse zu nehmen und für S eine rationale Funktion von Z.

Wir kommen nun zur Beantwortung der zweiten, eingangs dieses Paragraphen gestellten Frage, ob sich irgend eine Funktion τ der Klasse, wie durch s und z, so auch durch S und Z rational darstellen lasse.

Zur Erledigung dieser Frage interpolieren wir τ durch S mit Hilfe der Lagrange'schen Interpolationsformel:

$$\varphi(t) = \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{\tau_\varkappa}{\Psi'(S_\varkappa, Z)} \cdot \frac{\Psi(t, Z)}{t - S_\varkappa},$$

worin $\tau_1, S_1, \ldots \tau_\varkappa, S_\varkappa, \ldots \tau_\nu, S_\nu$ die Werte bezeichnen, die τ, S in ν Punkten von T annehmen, in denen Z denselben Wert besitzt. Dieser Ausdruck $\varphi(t)$ hat nur dann einen wirklichen Sinn, wenn $\Psi'(S, Z)$ nicht für jedes Z Null wird, d. h. wenn nur ausnahmsweise für gewisse Werte von Z zwei oder mehr der Werte $S_1 \ldots S_\nu$ einander gleich werden. Unter dieser Voraussetzung, die, wie schon bewiesen, die Irreducibilität von $\Psi(\overset{\nu}{S}, \overset{\mu}{Z}) = 0$ nach sich zieht, ist:

$$\varphi(S_\varkappa) = \tau_\varkappa \qquad \text{für } \varkappa = 1, 2 \ldots \nu.$$

Wir untersuchen nun $\varphi(t)$ als Funktion von Z und als Funktion des willkürlichen Parameters t.

1°) Setzt man, der Abkürzung halber:

$$\sigma = \tau \cdot \frac{1}{t - S} \cdot \frac{\psi(t, Z)}{\psi'(S, Z)} = \tau \cdot \varrho,$$

so dafs

$$\varphi(t) = \sum_{\varkappa = 1}^{\nu} \sigma_\varkappa$$

wird, so folgt: ϱ ist rational in S und Z, wird also nur zu endlicher Ordnung und nicht unendlich oft unendlich. Letzteres gilt auch von der Funktion τ der Klasse und daher gleichfalls von $\sigma_1 \ldots \sigma_\nu$ und von $\varphi(t)$ selbst.

Bezeichnet ferner l einen Ringweg in der Z-Ebene, der S_1 etwa in S_λ überführt, so wird dabei zugleich τ_1 in τ_λ übergeführt, und daher σ_1 in σ_λ. Irgend ein Ringweg in der Z-Ebene bringt also nur eine Permutation der Summanden $\sigma_1 \ldots \sigma_\nu$ von $\varphi(t)$ hervor und führt somit $\varphi(t)$ wieder zu seinem Anfangswerte zurück, d. h. $\varphi(t)$ ist einwertige Funktion von Z, und da sie aufserdem nur zu endlicher Ordnung und nicht unendlich oft unendlich wird, rationale Funktion von Z.

2°) Aus

$$\psi(t, Z) = Q \cdot (t - S_1) \ldots (t - S_\nu)$$

folgt: $\varphi(t)$ ist ganze Funktion von t, und als solche höchstens vom Grade $\nu - 1$. Zusammen mit dem Umstande, dafs nach 1°) $\varphi(t)$ rationale Funktion von Z ist, liefert dies für $\varphi(t)$ den Ausdruck:

$$\varphi(t) = \frac{L_1 \cdot t^{\nu - 1} + L_2 \cdot t^{\nu - 2} + \ldots + L_\nu}{M},$$

worin $L_1, \ldots L_\nu, M$ ganze Funktionen von Z sind. Gemäfs $\varphi(S_\varkappa) = \tau_\varkappa$ ergeben sich hieraus die ν Formeln:

$$\tau_\varkappa = \frac{L_1 \cdot S_\varkappa^{\nu - 1} + \ldots + L_\nu}{M} \qquad (\varkappa = 1, 2 \ldots \nu),$$

welche mit der einen Gleichung

$$\text{III°)} \qquad \tau = \frac{L_1 \cdot S^{\nu - 1} + L_2 \cdot S^{\nu - 2} + \ldots + L_\nu}{M}$$

äquivalent sind. — Mit Hilfe der zwischen S und Z bestehenden irreducibeln Gleichung I⁰) läfst sich dieser in S ganze, in Z rationale Ausdruck III⁰) in einen in S und Z rationalen Ausdruck umformen. Nennen wir daher zwei Funktionen S und Z der Klasse, die so geartet sind, dafs nicht für jeden Wert der einen Funktion Z zwei oder mehr der entsprechenden Werte der andern Funktion S einander gleich werden, gegenseitig irreducibele oder irrationale Funktionen der Klasse, so können wir den Satz aussprechen:

Satz IV⁰) Jede Funktion τ der Klasse läfst sich darstellen als rationale Funktion von irgend zwei gegenseitig irreducibeln Funktionen S, Z der Klasse.

Aus diesem Satze, der eine Erweiterung von Satz III⁰), § 12 ist, ergiebt sich schliefslich das wichtige Resultat:

Satz V⁰) Bezeichnen S und Z irgend zwei gegenseitig irreducibelen Funktionen von den Ordnungen μ und ν aus der durch die irreducibele Grundgleichung $F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right) = 0$ definierten Klasse algebraischer Funktionen, so sind die zwei durch die irreducibeln Gleichungen $F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right) = 0$ und $\Psi\left(\overset{\nu}{S}, \overset{\mu}{Z}\right) = 0$ definierten Funktionenklassen identisch.

Auf diesem Satze beruht die Theorie der birationalen Transformationen.

---

§ 14. Einfach und mehrfach zusammenhängende Flächen.

Durch Einführung der Fläche T haben wir uns ein Gebiet geschaffen, innerhalb dessen jede algebraische Funktion τ der Klasse sich wie eine eindeutige Funktion des Ortes verhält, innerhalb dessen also die das Studium dieser Funktionen erschwerende Vieldeutigkeit aufgehoben ist. Für das Studium der Integrale der Funktionen der Klasse ist damit aber noch nicht alles Wünschenswerte geleistet. Läfst man z. B. die Variabele z in der Fläche T einen Ringweg l

beschreiben, und bildet man das Integral $\int_l z\,dz$, wo die Integration sich in positiver Richtung über l erstreckt, so wird der Wert dieses Integrals durch die Cauchy'schen Residuensätze über einwertige Funktionen nur dann gegeben, wenn aufserdem feststeht, dafs l ein Stück A von T vollständig begrenzt, d. h. so begrenzt, dafs man von keinem Punkte von A zu irgend einem Punkte des übrig bleibenden Restes B von T gelangen kann, ohne den Ringweg l zu überschreiten.

Dafs es in der That Ringwege l in T geben kann, die kein Flächenstück von T vollständig begrenzen, ist leicht einzusehen. Legt man nämlich in der zweiblättrigen Fläche der hyperelliptischen Funktionen (Beisp. 1°), § 10), einen Ringweg l an, der ganz im Blatte E_1 verläuft und die zwei Verzweigungspunkte α und α_1 umschliefst, so schliefst dieser Ringweg kein Stück von T vollständig ein; denn man kann immer noch auf einem Wege, der l nicht überschreitet, von irgend einem Punkte innerhalb l nach einem beliebigen Punkte in E_1 oder E_2 gelangen. — Bei dieser speziellen Fläche T sagt uns die Anschauung unmittelbar, wann ein Ringweg in T ein Stück von T vollständig begrenzt, und wann nicht. Bei allgemeinen Flächen dagegen ist dies nicht mehr der Fall; dort kann uns über diese Frage die Anschauung allein nicht mehr Aufschlufs geben. Es mufs daher, bevor wir an das Studium der Integrale der Klasse gehen, eine allgemeine Theorie eingeschaltet werden, welche diesen Mangel an Anschaulichkeit bei der Fläche T wieder gut macht. Als Resultat dieser Theorie wird sich herausstellen, dafs die Fläche T durch gewisse in ihr anzulegende Schnitte, sogenannte Querschnitte, stets so umgeformt werden kann, dafs nach Ausführung dieser Schnitte jeder Ringweg ein Stück der Fläche vollständig begrenzt.

Um den Gültigkeitskreis der im Folgenden abzuleitenden Resultate nicht unnötig einzuschränken, fassen wir zunächst ganz allgemeine, beliebig gestaltete Flächen F ins Auge, die nur an folgende Voraussetzungen gebunden seien:

1°) sie seien z u s a m m e n h ä n g e n d, d. h. es sei möglich, von irgend einem Punkte von F zu irgend einem anderen Punkte von F zu gelangen, ohne aus der Fläche herauszutreten;

2º) sie seien **bilateral**, d. h. sie mögen den Raum so in zwei Teile zerlegen, daſs es unmöglich ist, aus einem Teile in den anderen zu gelangen, ohne durch die Fläche hindurchzudringen;

3º) sie mögen sich nicht längs einer Linie in mehrere Blätter spalten oder isolierte Punkte besitzen, in denen mehrere Blätter zusammenhängen.

In einer solchen Fläche sind drei Arten von Schnitten möglich:

aº) **Punktschnitte**: Dieselben entstehen, wenn man in F irgendwo einen Punkt α sich herausgenommen denkt; durch einen Punktschnitt wird F eine geschlossene Randkurve erteilt. Wir werden im Folgenden dann noch von einem Punktschnitte sprechen, wenn wir von α aus nach verschiedenen Seiten hin Schnitte ziehen, die sich nicht schlieſsen (Fig. 22, No. 1 und 2); immer aber wird der Fläche F durch einen Punktschnitt eine geschlossene Randkurve erteilt.

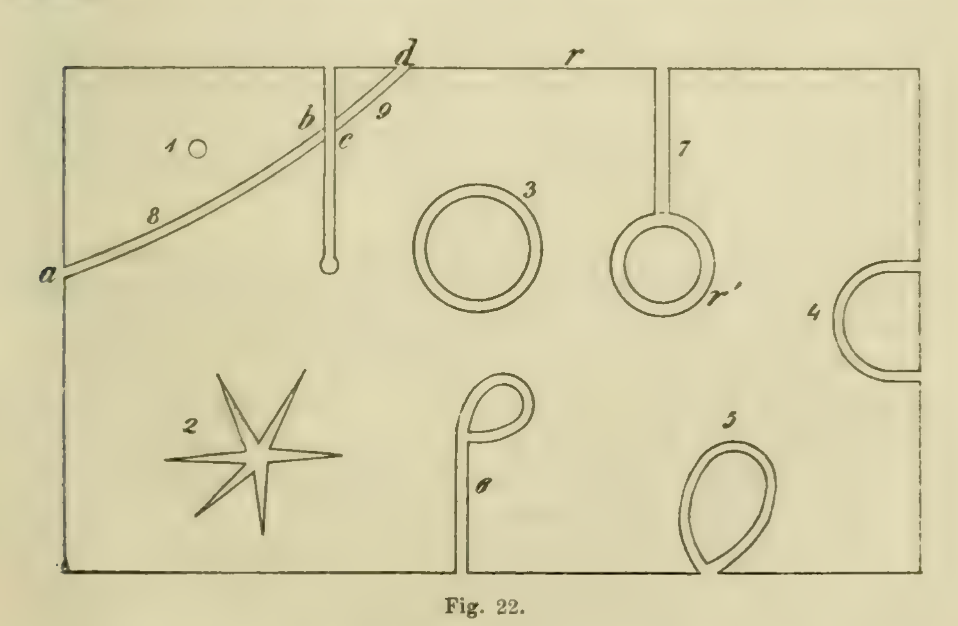


Fig. 22.

bº) **Rückkehrschnitte**: Ein solcher Schnitt entsteht, wenn man von einem Punkte der Fläche ausgehend, in F einen Schnitt anlegt, der zu seinem Ausgangspunkte zurückkehrt. Ein Rückkehrschnitt erteilt F zwei geschlossene Randkurven, die zwei Ränder des Schnittes (Fig. 22, No. 3).

c°) Querschnitte: Dieselben entstehen, wenn man von einem Punkte einer Randkurve von F aus einen Schnitt führt, der wieder in einem Punkte einer Randkurve von F endigt. Ein Querschnitt ist also nur möglich, wenn F bereits mindestens eine Randkurve besitzt. Es giebt drei Arten von Querschnitten:

α°) Anfangs- und Endpunkt des Querschnittes liegen auf einer und derselben Randkurve (Fig. 22, No. 4 und 5). Ein solcher Schnitt vermehrt die Anzahl der Randkurven von F um 1.

β°) Der Querschnitt geht von einem Punkte einer Randkurve von F aus und endigt in sich selbst (Fig. 22, No. 6). Ein solcher Schnitt vermehrt ebenfalls die Anzahl der Randkurven von F um 1.

γ°) Der Querschnitt Q geht von einem Punkte einer Randkurve r aus und endigt in einem Punkte einer anderen Randkurve r' (Fig. 22, No. 7°). Ein solcher Schnitt vermindert die Anzahl der Randkurven von F um 1, da jetzt r, Q, r' nur mehr eine Randkurve bilden. Wie leicht einzusehen, wird F durch einen Querschnitt dieser Art nie in Stücke zerlegt. — Wir werden einen solchen Querschnitt im Folgenden stets mit Q_{-1}, die Querschnitte der zwei ersten Arten mit Q_{+1} bezeichnen. Ein Q_{-1} zusammen mit einem Rückkehrschnitt bildet einen Q_{+1}.

Werden in F mehrere Querschnitte hintereinander angelegt, so ist festzuhalten, dafs beim Ziehen eines Querschnittes die früher angelegten Querschnitte, ebenso wie die bereits ausgeführten Teile des Querschnittes selbst als zur Begrenzung gehörig zu nehmen sind. Ein folgender Querschnitt kann also in einem Punkte eines früheren anfangen und auch endigen, oder auch in sich selbst zurückkehren. Stets aber endigt ein Querschnitt, sobald er einen schon bestehenden Rand von F trifft. Der in einem Zuge angelegte Schnitt 8—9 in Fig. 22 ist daher als aus den zwei Querschnitten ab, cd bestehend anzusehen.

Wir untersuchen nun, welches der Einflufs der eben besprochenen Schnitte auf eine Fläche F von den oben angegebenen Eigenschaften ist. — Von besonderem Interesse sind dabei für uns jene Flächen F, in denen durch jeden Ringweg ein Stück von F vollständig begrenzt wird. Solche

Flächen heifsen, nach Riemann, einfach zusammenhängend; Flächen, bei denen dies nicht der Fall ist, heifsen mehrfach zusammenhängend. Einfach zusammenhängend ist z. B. die Fläche eines Kreises, die Fläche eines Rechtecks, allgemein jede ebene Fläche, deren Begrenzung aus einem sich selbst nicht schneidenden Linienzug besteht, ferner sogenannte geschlossene Flächen, wie die Oberfläche einer Kugel, eines Ellipsoids, u. s. w. Mehrfach zusammenhängend ist z. B. die zwischen den zwei Kreisen K und K_1 in Fig. 23 liegende Ringfläche; denn ein den Kreis K umschliefsender Ringweg l bildet nicht für sich allein die vollständige Begrenzung eines Stückes der Ringfläche, sondern erst zusammen mit dem Kreise K oder dem Kreise K_1. Ebenso ist die Mantelfläche eines Cylinders, eines Kegels, die Oberfläche eines ringförmigen Wulstes mehrfach zusammen hängend.

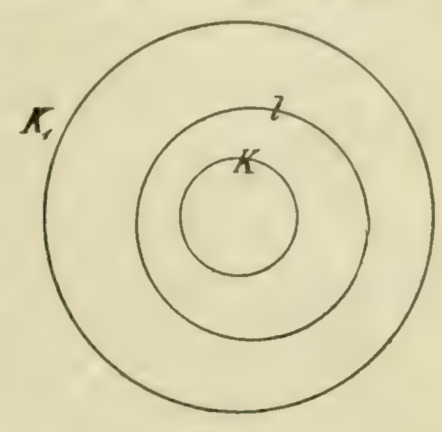


Fig. 23.

Für einfach zusammenhängende Flächen gelten folgende Sätze:

Satz I⁰) Eine einfach zusammenhängende Fläche wird durch jeden Querschnitt in zwei vollständig getrennte Teile zerlegt,

und umgekehrt:

Wird eine Fläche F durch jeden Querschnitt in zwei völlig getrennte Teile zerlegt, so ist sie einfach zusammenhängend.

Beweis: 1⁰) Angenommen, ein Querschnitt Q zerstückele F nicht; dann läfst sich ein Q_{-1} anlegen, der von einem Punkte α auf dem einen Rande von Q zu dem α auf dem andern Rande gegenüberliegenden Punkte β führt. Durch Anlegen dieses Q_{-1} wird F nicht zerstückelt; F bleibt also auch zusammenhängend, wenn man den Schnitt Q wieder löscht. Thut man das, so geht Q_{-1} über in einen Rückkehr-

schnitt, der F nicht zerstückelt, und dies widerspricht der Voraussetzung, dafs F einfach zusammenhängend sei.

2º) Angenommen, die Fläche F, die durch jeden Querschnitt zerstückelt wird, werde durch einen Rückkehrschnitt R nicht in Stücke zerlegt; dann läfst sich in F ein Q_{-1} anlegen, der von R nach dem Rande von F geht, und F nicht zerstückelt. Dieser Q_{-1} bildet dann mit R zusammen einen Q_{+1}, der F nicht zerstückelt, was der Voraussetzung widerspricht.

Aus diesem Satze ergiebt sich, dafs wir eine einfach zusammenhängende Fläche auch wie folgt definieren können:

Definition: Eine Fläche F heifst einfach zusammenhängend, wenn sie durch jeden Querschnitt in Stücke zerlegt wird.

Diese Definition legen wir von hier an zugleich mit der früher gegebenen zu Grunde. — Es gelten die weiteren Sätze:

Satz IIº) Jede einfach zusammenhängende Fläche hat nur eine Randkurve.

Beweis: Besäfse F zwei Randkurven, so liefse sich zwischen ihnen ein Q_{-1} anlegen, der F nicht zerstückelt, was der Voraussetzung widerspricht, dafs F einfach zusammenhängend ist.

Satz IIIº) Eine einfach zusammenhängende Fläche F wird durch jeden Querschnitt in zwei einfach zusammenhängende Teile zerlegt,

und umgekehrt:

wird F durch einen Querschnitt in zwei einfach zusammenhängende Teile zerlegt, so ist F einfach zusammenhängend.

Beweis: 1º) In F, das nach Voraussetzung einfach zusammenhängend ist, bildet jeder Ringweg für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächenstücks; dasselbe gilt also auch von jedem Ringweg, der ganz innerhalb eines der zwei Stücke A_1, A_2 verläuft, in die F durch einen bestimmten Querschnitt zerlegt wird.

2º) In F denken wir uns neben dem Querschnitte Q, der F in zwei einfach zusammenhängende Stücke zerlegt,

noch einen zweiten Querschnitt Q' angelegt. Für die Zerfällung von F ist es dann ganz gleichgültig, ob wir in F zuerst Q und hierauf Q', oder zuerst Q' und dann Q anlegen.

Im ersten Falle zerfällt F, nach dem ersten Teile dieses Satzes, in

$$3 + \varkappa$$

einfach zusammenhängende Teile, wo $\varkappa = 1$ oder 0 ist, je nachdem Q' den Querschnitt Q schneidet oder nicht.

Im zweiten Falle zerlegt Q' die Fläche F in höchstens zwei, d. h. in $1 + \lambda$ Teile ($\lambda = 0$ oder 1), von denen jedoch nicht feststeht, ob sie einfach zusammenhängend sind oder nicht. Legt man hierauf Q an, so ist Q gleichbedeutend mit $1 + \varkappa$ Querschnitten, zerlegt also F in höchstens $1 + \lambda + 1 + \varkappa$, oder genau in

$$1 + \lambda + 1 + \varkappa - \mu = 2 + \lambda + \varkappa - \mu$$

Teile, wo für λ die Werte 0 und 1, für μ die Werte 0, 1, 2 in Aussicht zu nehmen sind. Da diese Teile mit den auf dem ersten Wege erhaltenen $3 + \varkappa$ einfach zusammenhängenden Teilen identisch sind, müssen auch sie einfach zusammenhängend sein und es ist

$$3 + \varkappa = 2 + \lambda + \varkappa - \mu,$$

$$\text{d. h.} \quad 1 = \lambda - \mu.$$

Letzteres ist aber nur möglich, wenn $\lambda = 1$, $\mu = 0$ ist, d. h. wenn der beliebig angelegte Querschnitt Q' die Fläche F in zwei Teile zerlegt. Damit ist der Satz bewiesen.

Der zweite Teil des eben bewiesenen Satzes läfst sich auch wie folgt aussprechen:

Satz III$_a^0$) Heftet man zwei einfach zusammenhängende Flächen so aneinander, dafs durch Zerschneiden dieser Heftungen ein einziger Querschnitt entsteht, so erhält man eine einfach zusammenhängende Fläche.

In dieser Form werden wir den Satz III$_a^0$) im nächsten Paragraphen anwenden.

Satz IV°) Jede einfach zusammenhängende Fläche F wird durch n aufeinanderfolgende Querschnitte in $n+1$ einfach zusammenhängende Teile zerlegt,

und umgekehrt:

Zerfällt eine Fläche F durch n aufeinanderfolgende Querschnitte in $n+1$ einfach zusammenhängende Teile, so ist sie selbst einfach zusammenhängend.

Beweis: 1°) Der Beweis ergiebt sich durch n-malige Anwendung des Satzes III°) 1°).

2°) Der Beweis wird in ähnlicher Weise geführt, wie bei Satz 3°) 2°). — Wir denken uns aufser den n Querschnitten $Q_1 \ldots Q_n$ noch einen weiteren, beliebigen Querschnitt Q' in F angelegt. Für das Schlufsresultat, d. h. für die Natur und Zahl der schliefslich in F entstehenden Stücke ist es dann gleichgültig, ob zuerst $Q_1 \ldots Q_n$ angelegt werden und hierauf Q', oder umgekehrt zuerst Q' und dann $Q_1 \ldots Q_n$.

Legt man den Querschnitt Q' zuletzt an, so ist er, wenn er $Q_1 \ldots Q_n$ ν-mal trifft, für $1+\nu$ Querschnitte zu zählen. Durch die in der Reihenfolge $Q_1 \ldots Q_n$, Q' angelegten Querschnitte zerfällt also F in

$$n+1+1+\nu$$

einfach zusammenhängende Teile. Legt man zuerst Q' in F an, so wird F zerlegt in

$$1+\lambda \qquad (\lambda = 0 \text{ oder } 1)$$

Teile, von denen wir nicht wissen, ob sie einfach zusammenhängend sind oder nicht. Legt man dann weiter $Q_1 \ldots Q_n$ an, so sind diese n Schnitte für

$$n+\nu$$

Querschnitte zu zählen, zerlegen also schliefslich F in höchstens

$$1+\lambda+n+\nu,$$

oder genauer in

$$1+\lambda+n+\nu-\mu$$

Teile, wobei μ einen der Werte $0, 1, 2, \ldots n + \nu$ besitzt. Diese Teile sind identisch mit den auf dem ersten Wege erhaltenen $n + 1 + 1 + \nu$ einfach zusammenhängenden Teilen, und es ist daher

$$n + 1 + 1 + \nu = 1 + \lambda + n + \nu + \mu,$$

oder

$$1 = \lambda - \mu.$$

Letztere Gleichung kann, zufolge der für λ und μ zulässigen Werte, nur erfüllt sein, wenn $\lambda = 1$, $\mu = 0$ ist, d. h. wenn der beliebige Querschnitt Q' die Fläche F in zwei Teile zerlegt. F ist also einfach zusammenhängend, w. z. b. w.

Satz V^0) Verwandelt ein Querschnittsystem eine Fläche F in eine einfach zusammenhängende, so macht jedes andere Querschnittsystem von gleich vielen Querschnitten, das F nicht zerstückelt, F ebenfalls einfach zusammenhängend.

Beweis: Es sei $Q_1 \ldots Q_n$ ein Querschnittsystem, das F einfach zusammenhängend macht,

$Q'_1 \ldots Q'_n$ ein Querschnittsystem, das F nicht zerstückelt.

Trifft das System $Q'_1 \ldots Q'_n$ $\varkappa$-mal das System $Q_1 \ldots Q_n$, so wird F, wenn man zuerst $Q_1 \ldots Q_n$ und dann $Q'_1 \ldots Q'_n$ ausführt, in

$$1 + n + \varkappa$$

einfach zusammenhängende Teile zerlegt. — Führt man zuerst $Q'_1 \ldots Q'_n$ und hierauf $Q_1 \ldots Q_n$ aus, so zerfällt F in dieselben $1 + n + \varkappa$ einfach zusammenhängende Teile. Nach Anlegung von $Q'_1 \ldots Q'_n$ zählt aber das System $Q_1 \ldots Q_n$ für $n + \varkappa$ Querschnitte. Die Fläche F wird daher durch $Q' \ldots Q'_n$ in eine Fläche F_1 verwandelt, die durch $n + \varkappa$ Querschnitte in $1 + n + \varkappa$ einfach zusammenhängende Teile zerlegt wird; F_1 ist also, nach Satz IV^0) einfach zusammenhängend, w. z. b. w.

Satz VI^0) Läfst sich eine Fläche F in eine einfach zusammenhängende verwandeln, so ist die Anzahl der Querschnitte, durch

welche dies erreicht werden kann, eine für diese Fläche unveränderliche, konstante Zahl.

Beweis: Angenommen, F werde einfach zusammenhängend gemacht

1°) durch $Q_1 \ldots Q_n$,

2°) „ $Q'_1 \ldots Q'_n$, $Q'_{n+1}, \ldots Q'_{n+\nu}$ $(\nu \gtreqless 1)$.

Nach dem vorigen Satze müssen dann schon $Q'_1 \ldots Q'_n$ die F sicher nicht zerstückeln, F einfach zusammenhängend machen; F würde also einfach zusammenhängend

1°) durch $Q'_1 \ldots Q'_n$,

2°) „ $Q'_1 \ldots Q_n$, $Q'_{n+1} \ldots Q'_{n+\nu}$,

d. h. in der durch $Q'_1 \ldots Q'_n$ einfach zusammenhängend gemachten Fläche wäre noch ν $(\gtreqless 1)$ Querschnitte möglich, die diese Fläche nicht zerstückeln. Dies steht in Widerspruch mit der Definition der einfach zusammenhängenden Flächen; ν mufs also $= 0$ sein, w. z. b. w.

Die für eine gegebene Fläche F konstante Anzahl von Querschnitten, durch welche diese Fläche einfach zusammenhängend gemacht wird, spielt eine fundamentale Rolle in den Ausführungen der folgenden Paragraphen.

Wir wenden zunächst die vorhergehenden Sätze auf die Riemann'sche Fläche T an.

---

§ 15. Anwendung des Vorigen auf die Riemann'sche Fläche T.

Wir weisen zunächst nach, dafs T sich durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandeln läfst.

Zu dem Zwecke denken wir uns T entstanden durch Zusammenheftung der n Blätter $E_1 \ldots E_n$ längs Schnitten, die strahlenförmig von n in den n Blättern $E_1 \ldots E_n$ übereinander liegenden Punkten $P_1 \ldots P_n$ nach den Verzweigungspunkten von s laufen; ist hierbei ein Verzweigungspunkt α_i von s kein Verzweigungspunkt für die Wurzel $s_\varkappa$, deren Wertvorrat im Blatte $E_\varkappa$ ausgebreitet liegt, so geht in $E_\varkappa$ kein Schnitt von $P_\varkappa$ nach α_i.

Die so entstandene Fläche T hat keine Randkurve; Querschnitte lassen sich daher in ihr vor der Hand nicht anlegen. Um das Anlegen von Querschnitten zu ermöglichen, punktieren wir die Fläche T, d. h. wir führen in ihr eine Anzahl von Punktschnitten aus, und zwar heben wir folgende Punkte heraus:

1º) die n Punkte $P_1 \ldots P_\varkappa \ldots P_n$,

2º) sämtliche Verzweigungspunkte von T.

Hängen dabei in einem Verzweigungspunkte ν Blätter von T zusammen, so denken wir uns diesen Verzweigungspunkt herausgehoben durch einen Schnitt, der diese n Blätter durchsetzt. Bezeichnet also v die Anzahl der Verzweigungspunkte, so besitzt T, nach Ausführung der erwähnten Punktschnitte, $n + v$ geschlossene Randkurven.

In der nunmehr punktierten Fläche T heben wir jetzt die Heftungen der Blätter längs der Strahlen von $P_1 \ldots P_n$ nach den Verzweigungspunkten wieder auf, indem wir in jedem Blatte $E_\varkappa$ von $P_\varkappa$ aus Schnitte ziehen nach den Verzweigungspunkten, an denen dieses Blatt teilnimmt. Die Anzahl dieser Schnitte ist, wenn allgemein ν die Ordnung eines Verzweigungspunktes bedeutet, gleich $\Sigma\nu$, die Summation über alle Verzweigungspunkte ausgestreckt gedacht. Durch diese $\Sigma\nu$ Querschnitte wird jeder Zusammenhang zwischen den n Blättern von T aufgehoben, T zerfällt in n Stücke $E'_1 \ldots E'_\varkappa \ldots E'_n$, und diese Stücke sind einfach zusammenhängend. Es ist nämlich z. B. $E'_\varkappa$ nichts anderes als das Blatt $E_\varkappa$ mit einem Punktschnitt, der von $P_\varkappa$ ausgeht und Zweige nach den Verzweigungspunkten ausschickt, in denen $E_\varkappa$ mit andern Blättern zusammenhing. Von den $\Sigma\nu$ Querschnitten lassen sich aber irgend welche $n + v - 1$ auffassen als Q_{-1}, welche die Ränder der $n + v$ ursprünglichen Punktschnitte zu einer geschlossenen Randkurve vereinigen. Die übrigen

$$\Sigma\nu - (n + v - 1)$$

zerlegen T in die erwähnten n einfach zusammenhängenden Stücke $E_1 \ldots E'_n$.

Es ist nun leicht, diese Stücke wieder so zusammenzuheften, dafs eine einfach zusammenhängende Fläche entsteht. Ist z. B. längs des Schnittes $Q_{\varkappa, i}$ von $P_\varkappa$ nach α_i

die Zuordnung der Wurzeln von $F = 0$ durch die Substitution:

$$S'_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots \varkappa \ldots n \\ i_1 & i_2 \ldots \lambda \ldots i_n \end{pmatrix}$$

gegeben, so hefte man längs $Q_{\varkappa, i} : \overset{+}{E'_\varkappa}$ an $\overset{-}{E'_\lambda}$. Gemäfs Satz III a⁰) des vorigen Paragraphen bilden dann $E'_\varkappa$ und E'_λ ein einziges einfach zusammenhängendes Flächenstück $E'_{\varkappa\lambda}$. An dieses Stück lassen sich durch $n - 2$ weitere, geeignete Heftungen sämtliche übrigen $n - 2$ einfach zusammenhängenden Stücke E' so anschliefsen, dafs ein einfach zusammenhängendes Stück $E'_{1,2,\ldots n}$ entsteht. Ist dies ausgeführt, so ist T in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt. Die Anzahl q der Querschnitte, die in dieser einfach zusammenhängenden Fläche liegen, d. h. die Anzahl der Querschnitte, durch welche T einfach zusammenhängend geworden ist, ist gleich der Zahl $\Sigma\nu$ der ursprünglich angelegten Schnitte, vermindert um diejenigen $n + v - 1$ Schnitte, die dazu gedient haben, die Ränder der $n + v$ Punktschnitte zu einer geschlossenen Randkurve zu vereinigen, vermindert weiter um die $n - 1$ Schnitte, die beim Zusammenheften von $E'_1 \ldots E'_n$ wieder aufgehoben worden sind. Es ist daher

$$q = \Sigma\nu - (n + v - 1) - (n - 1) = \Sigma\nu - v - 2(n - 1),$$

oder, wenn wir berücksichtigen, dafs v ebensoviel Einheiten enthält, als $\Sigma\nu$ Summanden:

$$1^0) \qquad q = \Sigma(\nu - 1) - 2(n - 1).$$

Nachdem so nachgewiesen ist, dafs T in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt werden kann, leiten wir im Anschlufs an Riemann (Ges. Werke, pag. 122—123) ein sehr übersichtliches Querschnittssystem ab, das zu demselben Ziele führt, und bei dessen Einführung die arithmetische Natur von q sich aufs deutlichste offenbart. Wir werden dieses System späterhin immer benutzen und nennen es das kanonische Querschnittssystem der Fläche T.

Die Fläche T besitzt als solche keine Begrenzung. Um in ihr Querschnitte anlegen zu können, erteilen wir ihr durch einen sonst beliebig gestalteten Punktschnitt P eine geschlossene Randkurve.

Ist dadurch T einfach zusammenhängend geworden, so ist $q = 0$, also eine gerade Zahl. — Ist T noch nicht einfach zusammenhängend, so läfst sich in ihr ein Rückkehrschnitt a_1 anlegen, der T nicht zerstückelt; nach Anlegung von a_1 hat dann T drei Randkurven, die zwei Ränder von a_1 und den Rand des Punktschnittes P. Diese drei Randkurven lassen sich durch zwei geeignete Q_{-1} zu einer geschlossenen Randkurve vereinigen; als solche Q_{-1} wählen wir, einmal einen Querschnitt b_1, der zwei an den Rändern von a_1 einander gegenüber liegenden Punkte verbindet, und dann einen Schnitt, der den Rand von P mit dem Kreuzungspunkte von a_1 und b_1 verbindet. Da die zwei Schnitte a_1 und c_1 zusammen einen Q_{+1} von P aus bilden, so können wir auch sagen: wir haben bis jetzt in T im ganzen zwei Querschnitte, einen Q_{+1} und einen Q_{-1}. Ist dadurch T einfach zusammenhängend geworden, so ist $q = 2$, also wieder eine gerade Zahl.

Ist T noch nicht einfach zusammenhängend, so lassen sich zwei weitere Schnitte Q_{+1} und Q_{-1} anlegen, genau wie vorhin. Ist dann T einfach zusammenhängend, so ist $q = 4$.

Ist T noch nicht einfach zusammenhängend, so setzt sich dieses Verfahren fort, jedoch nicht bis ins Unendliche, da q durch die Gleichung 1º) bestimmt ist. — Auf jeden Fall aber ergiebt sich: die Anzahl q der Querschnitte, durch welche T in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt werden kann, ist eine gerade. Setzen wir daher $q = 2p$, so ist

2º) $$2p = \Sigma(\nu - 1) - 2(n - 1).$$

Ist umgekehrt die Zahl p ermittelt auf Grund der Gleichung 2º), so liefern die vorigen Betrachtungen ein einfaches Querschnittssystem, um T einfach zusammenhängend zu machen.

In T legen wir p Rückkehrschnitte $a_1, a_2 \ldots a_p$ an, die T nicht zerstückeln, und p Querschnitte $b_1, b_2, \ldots b_p$ von der Art eines Q_{-1}, genau wie vorhin, zu jedem a einen; auch diese zerstückeln T nicht. Ziehen wir dann noch von irgend einem nichtsingulären Punkte P von T aus Schnitte $c_1 \ldots c_p$ nach den Kreuzungsstellen der Querschnittpaare, $a_1, b_1, \ldots a_p, b_p$,

(siehe Fig. 24), so wird T durch die Gesamtheit dieser Schnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt, die wir von hier ab stets mit T' bezeichnen.

Jeder der $3p$ Schnitte $a_1 \ldots a_p$, $b_1 \ldots b_p$, $c_1 \ldots c_p$ besitzt 2 Ränder, die wir, wie die Figur angiebt, als + Rand und — Rand unterscheiden, und die Gesamtheit dieser $6p$ Ränder bildet eine geschlossene Randkurve, die Begrenzung der Fläche T'. Die in der Figur eingetragenen Pfeile zeigen an, wie diese geschlossene Randkurve bei einem positiven Umlauf um T' zu durchlaufen ist.

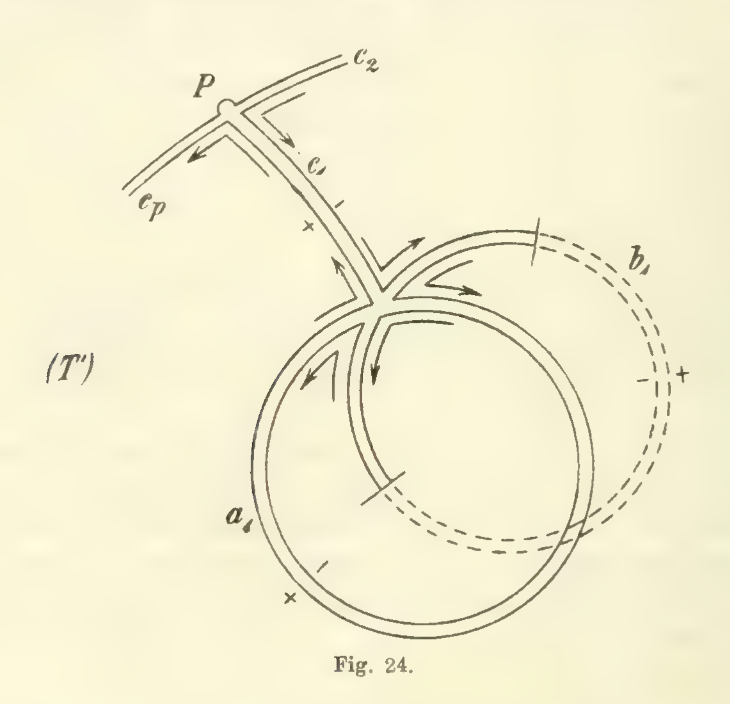


Fig. 24.

In speziellen Fällen, z. B. bei der Fläche der hyperelliptischen Funktionen, lassen sich die Schnitte $c_1 \ldots c_p$ auch in einfacherer Weise anlegen, als vorhin angegeben. Da diese Schnitte c übrigens bei den meisten späteren Untersuchungen fast gar keine Rolle spielen, so werden sie oft bei der Anlage eines kanonischen Querschnittssystems in der Figur nicht eingetragen.

An die Gleichung 29) schliefst sich noch eine Bemerkung an.

Sind alle Verzweigungspunkte von T einfache Verzweigungspunkte, so ist jedesmal $\nu = 2$, d. h. $\nu - 1 = 1$; $\Sigma(\nu - 1)$

ist dann gleich der Anzahl r aller Verzweigungspunkte, und es gilt die Beziehung:

$$3^{0}) \qquad 2p = r - 2(n - 1),$$

aus der wieder, wie aus 4°) § 10, folgt, dafs r eine gerade Zahl ist. Denkt man sich übrigens, wenn Verzweigungspunkte höherer Ordnung ν vorkommen, jeden solchen Verzweigungspunkt gemäfs Satz III°) § 11, in $\nu - 1$ mit ihm äquivalente einfache Verzweigungspunkte aufgelöst, so können wir auch sagen: die Beziehung 3°) gilt allgemein, wofern die Verzweigungspunkte (nach Satz III°) § 11) richtig gezählt werden.

Die in den Beziehungen 2°) und 3°) auftretende, für eine gegebene Riemann'sche Fläche T konstante Zahl p heifst das Geschlecht der Fläche T oder der Gleichung $F\binom{n\ m}{s, z} = 0$, zu der T gehört. Sie wird in allen weiteren Untersuchungen eine fundamentale Rolle spielen.

In den folgenden Entwickelungen dieses Werkes beschränken wir uns durchweg auf den Fall von nur einfachen Verzweigungspunkten. Unter dieser Annahme*) gilt neben der obigen Beziehung 3°) auch die Gleichung 4°), § 10

$$4^{0}) \qquad r = 2m(n - 1) - 2r.$$

Eliminiert man r zwischen 3°) und 4°), so erhält man die weitere Beziehung:

$$5^{0}) \qquad p = (m - 1)(n - 1) - r,$$

von der wir wiederholt werden Gebrauch zu machen haben. Die in 4°) und 5°) vorkommende Gröfse r bezeichnet die Anzahl der Doppelpunkte von s, ohne Verzweigung.

---

§ 16. Beispiele zum Vorhergehenden.

Beispiel 1°) Es sei

$$s^2 = A \, . \, (z - a)(z - b).$$

Die zugehörige Fläche T ist zweiblättrig ($n = 2$) und hat zwei einfache Verzweigungspunkte in $z = a$ und $z = b$. Es ist daher

$$2p = 2 - 2(2 - 1) = 0, \text{ d. h. } p = 0.$$

*) Über die Berechtigung dieser Annahme siehe Kap. V, Transformationstheorie.

Die Fläche ist also bereits nach Anlegung des Verzweigungsschnittes von a nach b einfach zusammenhängend. Jeder geschlossene Weg in T ist die vollständige Begrenzung eines Flächenstückes. Da keine Querschnitte anzulegen sind, können wir auch von einem Punktschnitte absehen.

Beispiel 2°) Es sei

$$s^2 - (z^3 - a^3) = 0. \quad \text{(Beispiel II°) § 4).}$$

Die zugehörige Fläche T ist zweiblättrig ($n = 2$) und hat vier einfache Verzweigungspunkte in $A\,(z = a)$, $B\,(z = a\,\alpha)$, $C\,(r = a\,.\,\alpha^2)$ und $z = \infty$ $(\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3})$. Es ist daher

$$2p = 4 - 2\,(2 - 1) = 2, \text{ d. h. } p = 1.$$

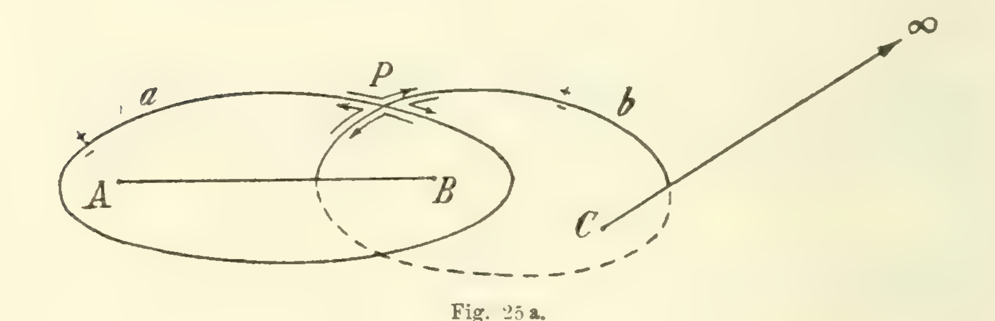


Fig. 25 a.

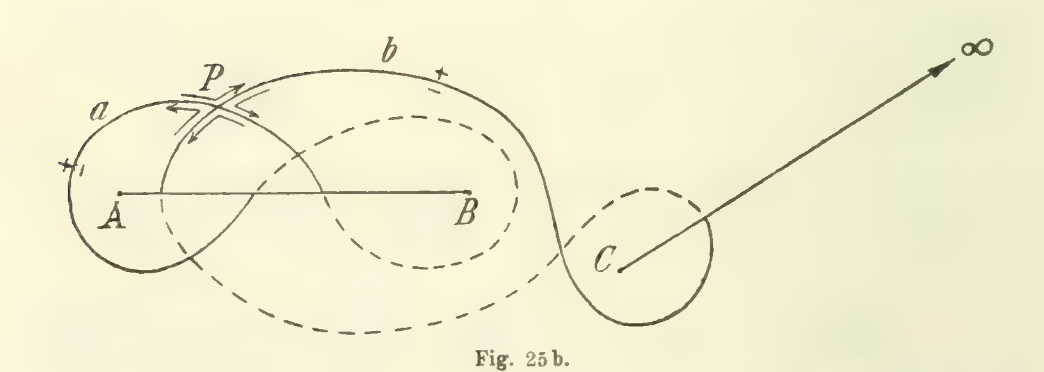


Fig. 25 b.

Die Fläche T wird einfach zusammenhängend durch ein Querschnittpaar (a, b), das T nicht zerstückelt. Die Figuren 25 a und 25 b geben zwei verschiedene Anordnungen dieses Querschnittpaares; die Schnitte in E_1 sind

dabei durch ausgezogene, die in E_2 durch gestrichelte Linien markiert.*)

Beispiel 3°) Es sei

$$s^2 = \lambda(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta).$$

Hierin ist $n = 2$, $r = 4$, und daher

$$2p = 4 - 2(2-1) = 2, \text{ d. h. } p = 1.$$

Das Querschnittpaar (a, b), das die Fläche T einfach zusammenhängend macht, läfst sich verschiedenartig anlegen, wie die Figuren 26 a, 26 b und 26 c zeigen, in denen die

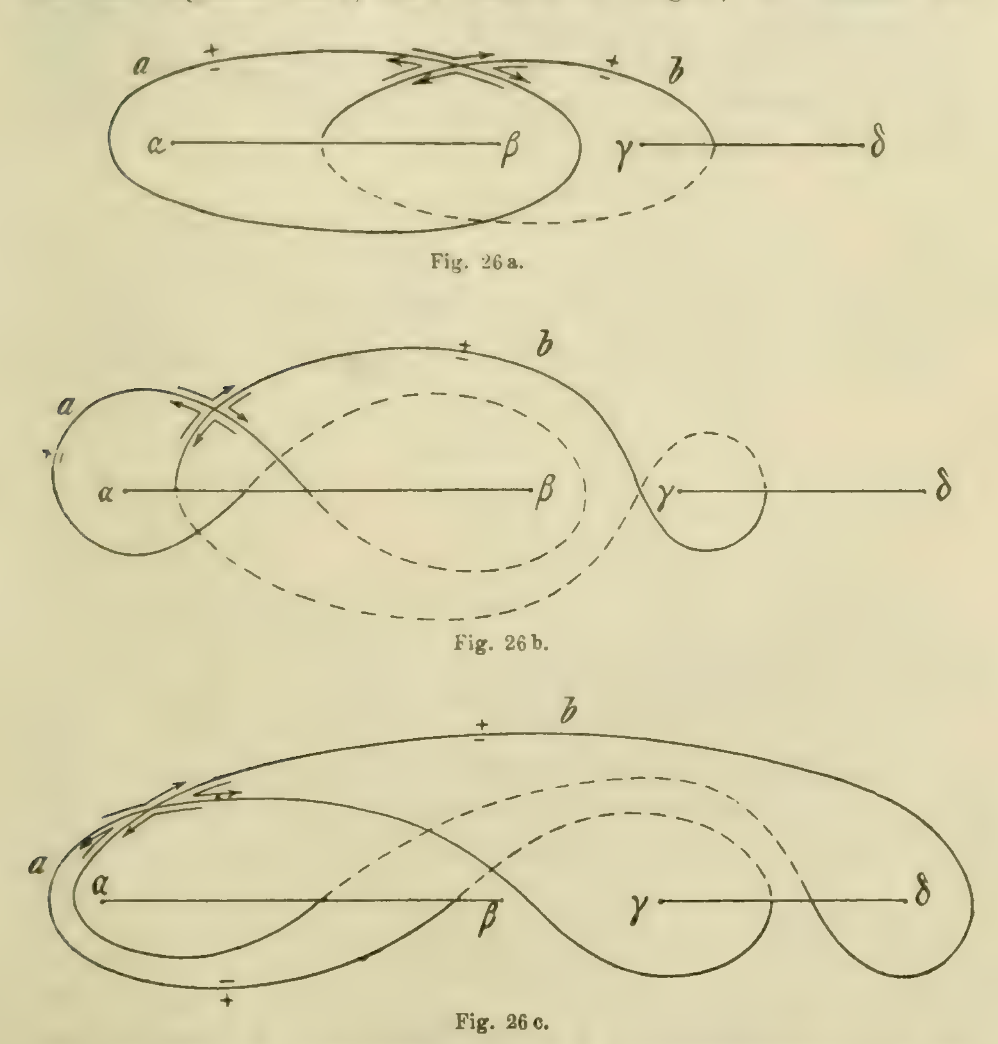


Fig. 26 a.

Fig. 26 b.

Fig. 26 c.

*) Von hier ab sind die zwei Ränder der Querschnitte nicht mehr getrennt gezeichnet, sondern durch das +, resp. — Zeichen an dem betreffenden Querschnitte kenntlich gemacht.

Schnitte in E_1 wieder durch ausgezogene, die in E_2 durch gestrichelte Linien markiert sind.

Beispiel 4°) Es sei

$$s^2 = (z - \alpha)(z - \alpha_1) \ldots (z - \alpha_{2q+1}).$$

Hier ist $n = 2$, $v = 2q + 2$, und daher

$$2p = 2q + 2 - 2(2 - 1) = 2q, \text{ d. h. } p = q.$$

Die Figuren 27 a und 27 b zeigen zwei verschiedene Anordnungen der $p = q$ Querschnittpaare (a, b), wobei zugleich die p Schnitte $c_1 \ldots c_p$ durch $p - 1$ wieder mit $c_1 \ldots c_{p-1}$ bezeichnete Schnitte so ersetzt sind, dafs allgemein $c_\varkappa$ den Kreuzungspunkt des Paares $(a_\varkappa, b_\varkappa)$ mit dem des Paares $(a_{\varkappa+1}, b_{\varkappa+1})$ verbindet.

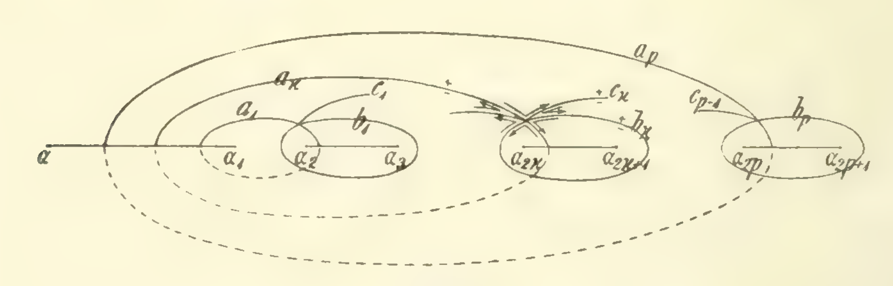


Fig. 27 a.

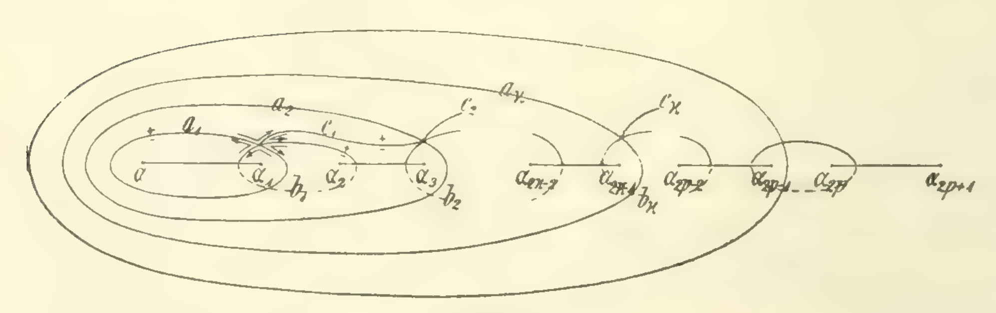


Fig. 27 b.

Beispiel 5°) Es sei

$$s^3 + z^3 - 1 = 0.$$

(Beispiel V°) § 4 und Beipiel 2°) § 11).

Die zugehörige Fläche T ist dreiblättrig $(n = 3)$ und besitzt Verzweigungspunkte von der Ordnung $\nu = 3$ an den Stellen

$z = 1, \alpha, \alpha^2 \left(\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)$. Jeder dieser Verzweigungspunkte ist nach Satz III°) § 11 äquivalent mit zwei einfachen Verzweigungspunkten; es ist daher

$$2p = 6 - 2(3-1) = 2, \text{ d. h. } p = 1.$$

Die Fläche T wird also einfach zusammenhängend durch ein Querschnittpaar (a, b), das T nicht zerstückelt. Figur 28, in der die Verzweigungspunkte, der Einfachheit halber, als in gerader Linie liegend gezeichnet sind, stellt ein solches Querschnittpaar dar. Die in E_1 verlaufenden Schnitte sind dabei durch ausgezogene, die in E_2 durch punktierte, die in E_3 durch gestrichelte Linien markiert.

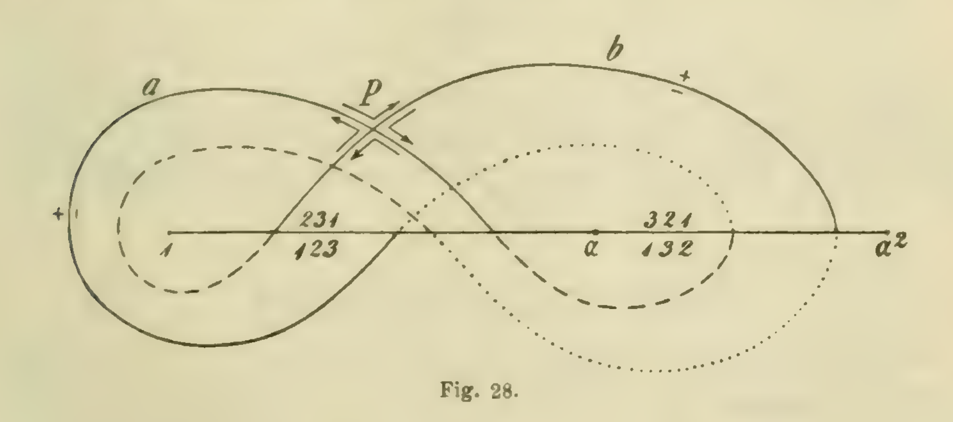


Fig. 28.

Beispiel 6°) Es sei

$$s^3 = \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)}. \quad \text{(Beispiel 3°) § 11).}$$

Die zugehörige Fläche T hat vier Verzweigungspunkte von der Ordnung $\nu = 3$ in den Punkten $z = \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$; da dieselben $4(3-1) = 8$ einfachen Verzweigungspunkten äquivalent sind, so ist

$$2p = 8 - 2(3-1) = 4, \text{ d. h. } p = 2.$$

Die Fläche T wird also einfach zusammenhängend durch zwei Querschnittpaare (a_1, b_1), (a_2, b_2), die T nicht zerstückeln, in Verbindung mit zwei Schnitten c_1, c_2. Figur 29, in der die Verzweigungspunkte als in gerader Linie liegend

angenommen und in der Reihenfolge α_1, β_1, α_2, β_2 durch den Verzweigungsschnitt Σ verbunden sind, zeigt eine Anordnung des Querschnittpaares (a_1, b_1), (a_2, b_2). Die zwei Schnitte c_1, c_2 sind dabei ersetzt durch einen Schnitt c, der den

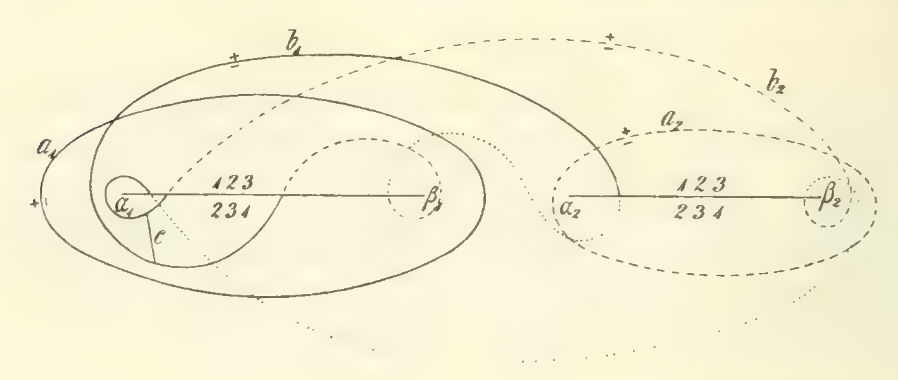


Fig. 29.

— Rand von b_1 mit dem $+$ Rand von b_2 verbindet; die Schnitte in E_1 sind durch ausgezogene, die in E_2 durch punktierte, die in E_3 durch gestrichelte Linien markiert.

---

§ 17. Normalform von T.

Herr Lüroth (Math. Annalen, Bd. IV) und Clebsch (Math. Annalen, Bd. VI) haben gezeigt, wie man der Verzweigungsfläche T, wenn nur einfache Verzweigungspunkte vorhanden sind, eine sehr übersichtliche Normalform erteilen kann. Wir geben in diesem Paragraphen in kurzen Zügen eine Darstellung der Resultate dieser zwei Autoren.*)

Es seien $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_v$ die in einer bestimmten, sonst beliebigen Reihenfolge numerierten Verzweigungspunkte der durch die Grundgleichung $F = 0$ definierten algebraischen Funktion s von z, P ein nicht singulärer Punkt der z-Ebene, $l_1, l_2 \ldots l_v$ Schnitte, welche von P nach den Verzweigungspunkten laufen. Die Reihenfolge der Verzweigungspunkte denken wir uns der Übersichtlichkeit wegen so gewählt, daſs

*) Die Darstellung schlieſst sich an an Picard, Traité d'analyse. Bd. II. pag. 367—74. — Eine ausführliche, an Clebsch sich anschlieſsende Darstellung findet man bei Herrn Stahl: Theorie d. Abel'schen Funktionen. pag. 31—38.

der von P nach α_1 gehende Strahl l_1 bei einer Umdrehung um P im Sinne der Drehung der Uhrzeiger successive die Punkte $\alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_v$ trifft. Den Schnitten $l_1 \ldots l_v$ haben wir früher (§ 11) Substitutionen $S_1', S_2' \ldots S_v'$ so zugeordnet, dafs allgemein S_i angiebt, wie ein + Umlauf um den Verzweigungspunkt α_i die Wurzeln $s_1 \ldots s_n$ von $F = 0$ permutiert. Unter den gegenwärtigen Voraussetzungen bewirkt jede solche Substitution S' eine Permutation von nur zwei Wurzeln. Wir denken uns nun die Schnitte l ersetzt durch geschlossene Wege, die von P ausgehend nach den Verzweigungspunkten α hin laufen, je einen Verzweigungspunkt in unmittelbarer Nähe umlaufen und dann wieder zu P zurückkehren. Jeden solchen Weg nennen wir eine Schleife. Bezeichnen wir die v Schleifen wieder mit $l_1 \ldots l_v$, so permutiert jede Schleife nur zwei Wurzeln von $F = 0$, und zwar wird allgemein die durch l_i hervorgebrachte Permutation diejenige sein, die durch die Substitution S_i' angegeben wird. In den Figuren sind die Schleifen durch einfache Linien markiert; die diesen Linien beigegebenen Indicespaare $\alpha\beta, \ldots$ geben die Wurzelpaare $s_\alpha s_\beta, \ldots$ an, die durch die jedesmalige Schleife permutiert werden.

Angenommen, die erste Schleife l_1 permutiere die zwei Wurzeln s_α, s_β. Dann wird, wenn wir mit dem Anfangswerte s_α von P ausgehen und die Gesamtheit aller Schleifen durchlaufen, ein solcher Weg, nach der früher (§ 11) bewiesenen Beziehung:

$$S_1' S_2' \ldots S_v' = 1,$$

ganz sicher s_α wieder zu seinem Anfangswerte zurückführen. Möglicherweise tritt dieses aber auch schon ein, bevor wir alle v Schleifen durchlaufen haben. Angenommen, wir kehren beim successiven Durchlaufen aller Schleifen zum erstenmale nach Durchlaufen der Schleife l_7 wieder zum Ausgangswerte s_α zurück. Wir ändern dann (Fig. 30) die Reihenfolge der Schleifen und ziehen die Schleife l_7 an die zweite Stelle, indem wir von P aus in dem Winkelraume zwischen l_1 und l_2 eine in der Figur durch eine punktierte Linie angedeutete Schleife λ_2 anlegen, die um α_7 führt und in ihrem Verlauf die zwischen l_1 und l_7 befindlichen Schleifen schneidet, welche ebenfalls s_α mit einer andern Wurzel permutieren. Die neue Schleife λ_2 permutiert gleichfalls zwei Wurzeln von $F = 0$,

Beachtet man, dafs ein Durchlaufen von λ_2, wie sich aus der Figur ergiebt, ersetzt werden kann durch ein successives Durchlaufen der Schleifen l_2, l_4, l_5, l_7, l_5, l_4, l_2, so sieht man, dafs die Schleife λ_2, welche an die Stelle von l_7 getreten ist, dieselben Wurzeln s_α, s_β permutiert wie l_1.

In analoger Weise lassen sich die zwei Schleifen l_3 und l_6, die s_α mit einer andern Wurzel permutieren, durch zwei neue Schleifen λ_3 und λ_6 ersetzen, wie die punktierten Linien in der Figur es angeben. Diese Schleifen permutieren nicht mehr die Wurzel s_α. λ_6 z. B. ist äquivalent mit einem Wege, der sich zusammensetzt aus den der Reihe nach durchlaufenen Schleifen l_7, l_6, l_7; da aber, nach Voraussetzung, l_7 die erste Schleife ist, nach deren Durchlaufen s_α wieder zu seinem Anfangswerte zurückkehrt, so ist $\lambda \neq \mu$. Die Schleife λ_6 bringt also dieselbe Permutation der Wurzeln hervor, wie die zweimal durchlaufene Schleife l_7, permutiert also nicht mehr die Wurzel s_α.

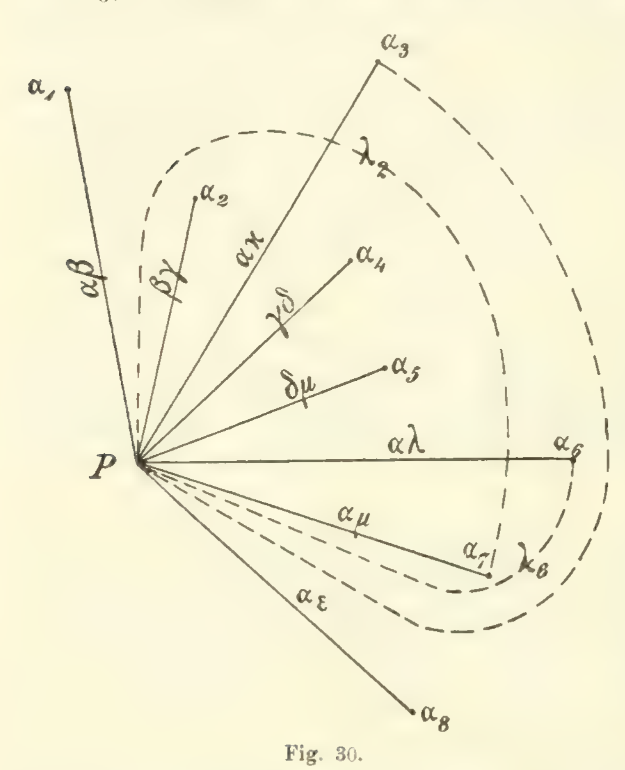


Fig. 30.

Die Reihenfolge der ursprünglichen Schleifen ist nun insofern umgeordnet, als dieselbe jetzt mit zwei Schleifen anfängt, welche beide die zwei Wurzeln s_α, s_β permutieren; an der Reihenfolge der übrigen Schleifen ist nichts geändert, mit der Ausnahme, dafs einige Schleifen ersetzt worden sind durch andere, welche die Wurzel s_α nicht mehr permutieren.

Gehen wir jetzt, statt wie vorhin von l_1, von λ_2 aus, und wiederholen wir die vorigen Operationen, so erhalten wir eine Reihenfolge von Schleifen, von denen die drei ersten

die zwei Wurzeln s_α, s_β permutieren, während zugleich andere Schleifen eingeführt worden sind, die s_α nicht mehr permutieren. Setzen wir dies Verfahren fort, so erhalten wir augenscheinlich schliefslich eine Reihenfolge der r Schleifen, bei der alle Schleifen, welche s_α und s_β permutieren, sich an erster Stelle finden und aufeinanderfolgen, während alle übrigen Schleifen s_α nicht mehr permutieren. Da ferner jede gerade Anzahl von Schleifen, die s_α und s_β permutieren, s_α wieder zu seinem Anfangswerte zurückführt, während jede ungerade Anzahl derselben s_α zum Endwerte s_β führt, und aufserdem ein Umlauf um sämtliche Schleifen s_α sicher zu seinem Anfangswerte zurückführt, so mufs die Anzahl der zu Anfang stehenden Schleifen, welche die zwei Wurzeln s_α und s_β permutieren, eine gerade sein.

Wir lassen nun die Schleifen, welche s_α und s_β permutieren, beiseite und wenden uns den auf sie folgenden Schleifen zu. Angenommen, die erste derselben permutiere s_β mit einer andern Wurzel s_γ. Wiederholt man dann für die Schleifen, welche s_β mit einer andern Wurzel permutieren, dieselben Operationen, die vorhin an den Schleifen vorgenommen worden sind, die s_α mit s_β permutieren, so erhält man eine zweite Gruppe von Schleifen, welche nur mehr die Wurzeln s_β und s_γ permutieren, während alle folgenden Schleifen weder s_α noch s_β permutieren.

So setzt sich das fort. Wir erhalten das Resultat: durch geeignete Umordnung lassen sich alle Schleifen in von einander getrennte Gruppen von je einer geraden Anzahl von Schleifen einteilen; die Schleifen der ersten Gruppe permutieren nur die zwei Wurzeln s_α, s_β, die der zweiten nur die Wurzeln s_β, s_γ, ... die der letzten die zwei Wurzeln $s_\varkappa$, s_λ, wo s_α, s_β, s_γ, ... $s_\varkappa$, s_λ alle Wurzeln von $F = 0$ bezeichnen.

Durch weitere Änderung der Reihenfolge der von P nach den Verzweigungspunkten laufenden Schleifen läfst sich noch eine gröfsere Einfachheit und Übersichtlichkeit erzielen.

Angenommen, die erste Gruppe G_1 von Schleifen, diejenige, deren einzelne Schleifen die Wurzeln s_α, s_β permutieren, bestehe aus sechs Elementen. Wir ziehen dann die zwei letzten Schleifen dieser ersten Gruppe hinter die erste Schleife der zweiten Gruppe G_2 (Fig. 31), was wir durch punktierte Linien andeuten. Die neuen Schleifen permutieren, wie un-

mittelbar ersichtlich, die Wurzeln s_α und s_γ. Zieht man schliefslich diese zwei Schleifen, wie die punktierten Linien in Fig. 32 es andeuten, wieder vor alle Schleifen der ersten Gruppe, so erhält man zwei Schleifen, welche s_β und s_γ permutieren. Dieselben Operationen lassen sich mit der dritten und vierten Schleife der ersten Gruppe ausführen. Ist dies geschehen, so sind die v Schleifen so angeordnet, dafs zuerst vier Schleifen kommen, von denen jede s_β, s_γ permutiert, hierauf zwei Schleifen, welche s_α, s_β permutieren, dann die Gruppe G_2 von Schleifen, welche s_β, s_γ permutiert

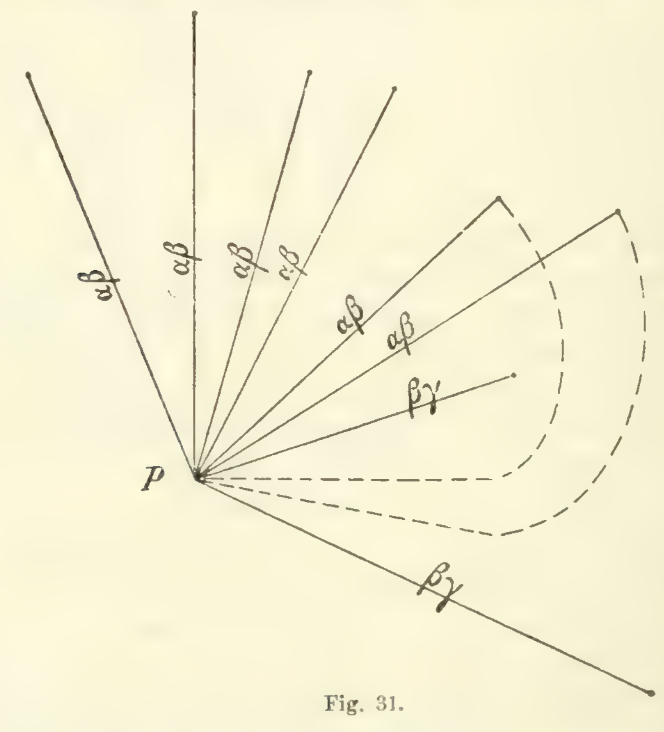


Fig. 31.

und schliefslich die übrigen Gruppen. Operiert man mit allen Schleifengruppen, wie mit G_1, so sieht man unmittelbar ein, dafs man durch geeignete Änderung der Reihenfolge die Schleifen $l_1 \ldots l_v$ so in Gruppen anordnen kann, dafs alle Gruppen mit Ausnahme der letzten aus zwei Schleifen bestehen und alle Schleifen einer Gruppe dieselben zwei Wurzeln permutieren, dafs ferner keine zwei Gruppen dieselben zwei Wurzeln permutieren, und jede Wurzel an den Permutationen zweier Gruppen teilnimmt. — Die Anzahl der Schleifen der letzten Gruppe sei gleich $2(k+1)$.

Angenommen, die ursprünglichen Schleifen seien in der soeben festgelegten Reihenfolge angeordnet. Wir bezeichnen dann wieder mit $\alpha_1 \ldots \alpha_v$ die entsprechende Reihenfolge der Verzweigungspunkte und numerieren die n Wurzeln von $F = 0$ so, daſs l_1 und l_2 die Wurzeln s_1, s_2, l_3 und l_4 die Wurzeln $s_2, s_3, \ldots$ und schlieſslich die $2(k+1)$ letzten Schleifen die Wurzeln s_{n-1}, s_n permutieren. Verbindet nun die in der z-Ebene angelegte Sperrlinie Σ (§ 11) die Verzweigungspunkte in dieser Reihenfolge $\alpha_1 \ldots \alpha_v$, und bezeichnet man

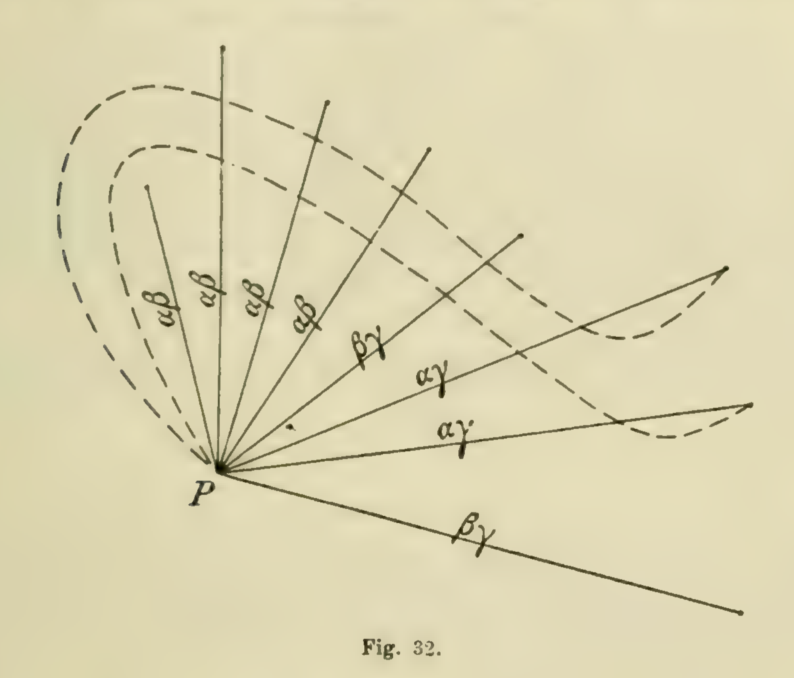


Fig. 32.

den von α_i nach α_{i+1} reichenden Abschnitt von Σ mit Σ_i, so ist die Zuordnung der Wurzeln längs $\Sigma_2, \Sigma_4, \Sigma_6, \ldots$ gegeben durch die identische Substitution, längs

$$\Sigma_1, \Sigma_3, \Sigma_5, \Sigma_7, \ldots$$

durch die Substitutionen:

$$S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{45}, \ldots,$$

wo allgemein

$$S_{\varrho,\sigma} = \begin{pmatrix} 1, 2 \ldots \varrho, \sigma \ldots n \\ 1, 2 \ldots \sigma, \varrho \ldots n \end{pmatrix}$$

ist. Dies gilt jedoch nicht durchweg. Ist l_{2v+1} der erste Schnitt, der s_{n-1} mit s_n permutiert, so ist die Zuordnung

der Wurzeln an allen $k+1$ Abteilungen $\Sigma_{2\nu+1}$, $\Sigma_{2\nu+3}, \ldots$ durch die Substitution $S_{n-1,n}$ gegeben.

Hieraus ergiebt sich eine einfache Konstruktion der zusammenhängenden Fläche T. Trägt man die Werte der n Wurzeln $s_1 \ldots s_n$ tabellarisch in n Ebenen $E_1 \ldots E_n$ ein, und legt man diese so aufeinander, daſs die Punkte mit gleichem z übereinander liegen, so wird s eindeutige Funktion des Ortes in der Fläche, die man erhält, wenn man E_1 mit E_2 längs eines Verzweigungsschnittes von a_1 bis a_2, E_2 mit E_3 längs eines Verzweigungsschnittes von a_3 bis $a_4, \ldots$ E_{n-1} mit E_n längs $k+1$ Verzweigungsschnitten zwischen $a_{2\nu+1}$ und $a_{2\nu+2}$, $a_{2\nu+3}$ und $a_{2\nu+4}, \ldots a_{v-1}$ und a_v zusammenheftet. Die Blätter der so entstandenen Fläche T hängen kettenförmig in der Weise zusammen, daſs jedes Blatt mit dem folgenden nur längs eines Verzweigungsschnittes zusammengeheftet ist; nur zwischen den zwei letzten Blättern wird der Zusammenhang längs $k+1$ Verzweigungsschnitten hergestellt.

Die Anzahl sämtlicher so erhaltenen Verzweigungsschnitte ist

$$n-2+k+1.$$

Die Zahl ist aber, da jeder Verzweigungsschnitt zwei Verzweigungspunkte verbindet, und keine zwei Verzweigungsschnitte durch denselben Verzweigungspunkt gehen, gleich der halben Anzahl aller Verzweigungspunkte, d. h.:

$$2(n+k-1)=v.$$

Andererseits ist aber auch (siehe § 15, 3°), wenn p das Geschlecht von T bedeutet:

$$2(n+p-1)=v.$$

Aus beiden Relationen folgt:

$$k=p.$$

Wir haben so das Schluſsresultat:

Ist die Grundgleichung $F=0$, die eine algebraische Funktion s von z mit nur einfachen Verzweigungspunkten $a_1 \ldots a_v$ definiert, vom Geschlechte p, so läſst sich die Reihenfolge, in

welcher die Sperrlinie Σ die Verzweigungspunkte verbindet, stets so wählen, dafs die Blätter der zugehörigen Fläche T kettenförmig in der Weise zusammenhängen, dafs jedes der $n-1$ ersten Blätter mit dem nächstfolgenden längs **eines**, das $(n-1)^{te}$ mit dem n^{ten} aber längs $p+1$ Verzweigungsschnitten zusammenhängt.

Diese für den Fall nur einfacher Verzweigungspunkte erreichbare Form von T nennen wir die Normalform der Riemann'schen Verzweigungsfläche.

Es bleibt nun noch zu zeigen, wie sich diese Normalform von T in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandeln läfst. Die Lösung dieser Aufgabe ist eine aufserordentlich einfache. Sind $\beta, \beta_1 \ldots \beta_{2p+1}$ die Verzweigungspunkte, welche E_{n-1} mit E_n verbinden, so legen wir in E_{n-1} und E_n ein System von p Querschnittbündeln a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2 \ldots p)$ an, die ganz in diesen zwei Blättern verlaufen und nach dem Schema der Querschnitte für den Fall der hyperelliptischen Funktionen (§ 16, Beispiel 4º) angeordnet sind. Diese Querschnitte zerstückeln T nicht, machen es also einfach zusammenhängend nach Satz Vº) § 14.

Über eine durch kontinuierliche Deformation der n-blättrigen Kugelfläche T erreichbare, besonders anschauliche Gestalt von T in Form einer zusammenhängenden, mit p Löchern versehenen Fläche im Raum, siehe: Clifford, On the canonical form and dissection of a Riemann's surface (Proceedings of the London mathematical Society, Bd. VIII No. 122); Hofmann: Methodik der stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemann'schen Flächen (Halle, 1888); Schottky, Crelle Bd. 83). — Über die stetige Deformation von Flächen siehe ferner: Jordan, Journal de Liouville, 2. série, t. XI) und einige Abhandlungen von Herrn Klein in den Mathem. Annalen.

In diesem Kapitel haben wir die Riemann'sche Fläche T konstruiert, indem wir von einer zu Grunde gelegten Gleichung $F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right) = 0$ ausgingen. Riemann selbst, und nach ihm andere Autoren, haben die Umkehrung dieser Fragestellung

behandelt. Sie sind von einer als fertig vorliegenden Fläche T ausgegangen und haben die Existenz von Funktionen auf einer solchen a priori angenommenen Fläche nachzuweisen und die Eigenschaften derselben zu studieren gesucht. Für das Studium dieser Umkehrung, die man auch als das Dirichlet'sche Problem für die Fläche T bezeichnet, sei auf die folgende Litteratur verwiesen:

Neumann: Vorlesungen über Riemann's Theorie d. Abelschen Integrale.

Schwarz: Ges. Werke. Bd. II.

Poincaré: American Journal of Mathematics, t. IX.

Jules Riemann: Sur le problème de Dirichlet (Annales de l'Ecole Normale, 1888).

Aufserdem sei noch verwiesen auf mehrere in den Mathem. Annalen erschienenen Abhandlungen der H. H. Klein, Hurwitz, Dyck, ..., und insbesondere auf die Abhandlung von Herrn Klein: Neue Beiträge zur Riemann'schen Funktionentheorie, Math. Annalen, Bd. 21, von Herrn Hilbert, Jahresbericht der deutschen Mathem. Vereinigung 1899.

Kapitel III.

Die Integrale der Klasse.

§ 18. Das allgemeine Abel'sche Integral.

Bedeutet τ irgend eine algebraische Funktion der Klasse, so heifst jedes Integral von der Form:

$$1^0) \qquad J = \int_{(s_0, z_0)}^{(s, z)} \tau \, dz$$

ein Abel'sches Integral oder auch ein Integral der Klasse. Der zugehörige Integrationsweg ist ein beliebiger Weg in T, der vom Anfangspunkte (s_0, z_0) nach dem Endpunkte (s, z) führt und durch keinen Verzweigungspunkt von T hindurchgehen soll.

Der Integrand τ von J ist in T eindeutige Funktion des Ortes und besitzt in dieser Fläche algebraische Unstetigkeiten (Pole), wenn er nicht etwa, was wir ausschliefsen, in T überall denselben konstanten Wert hat. Wie steht es mit der Stetigkeit und Eindeutigkeit von J in T?

Von dem Integrale J wissen wir bereits, dafs es in T ebenfalls Unstetigkeiten besitzen kann und zwar, aufser den bei den Funktionen der Klasse auftretenden algebraischen Unstetigkeiten, unter Umständen auch noch logarithmische Unstetigkeiten.

Soll J, ebenso wie τ, in T eindeutige Funktion des Ortes sein, so müssen nach der Lehre von den Integralen einwertiger Funktionen folgende zwei Bedingungen erfüllt sein:

1º) Irgend zwei Integrationswege vom Anfangspunkte $a(s_0, z_0)$ nach dem Endpunkte $b(s, z)$ müssen ein Stück von T vollständig abgrenzen; d. h. jeder Ringweg in T mufs die vollständige Begrenzung eines Stückes von T sein.

2º) Kein solcher Ringweg darf einen logarithmischen Unstetigkeitspunkt von J umlaufen.

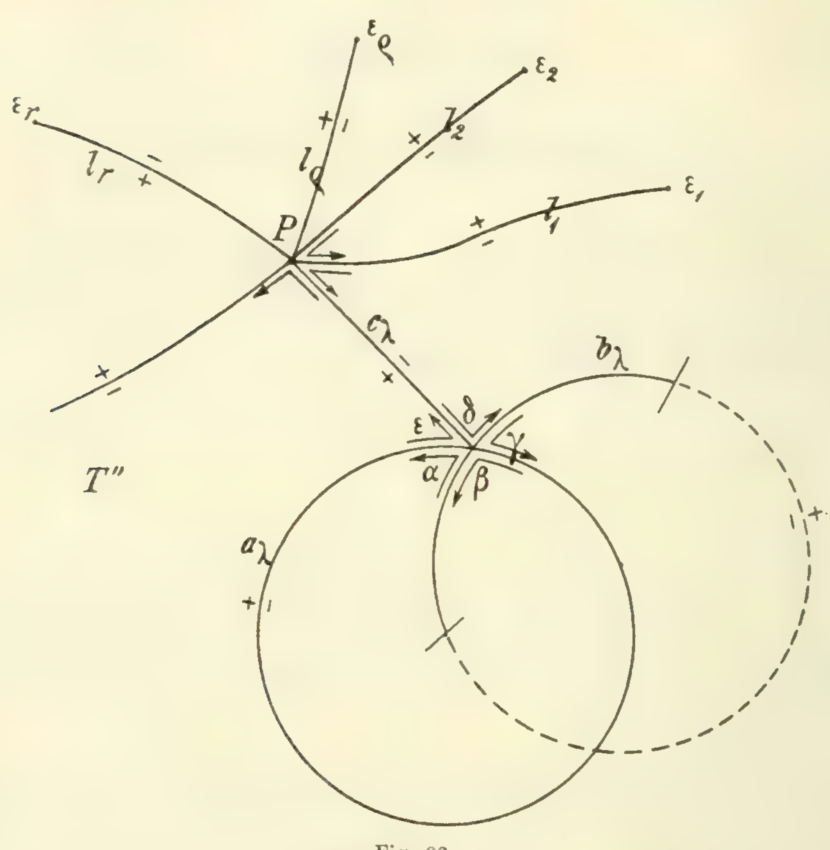


Fig. 33.

Um die erste Bedingung zu erfüllen, genügt es, T durch ein kanonisches Querschnittsystem in die einfach zusammenhängende Fläche T' zu verwandeln. Um auch die zweite Bedingung zu erfüllen, ziehen wir von einem beliebigen, nicht singulären Punkte von T' aus Schnitte $l_1 \ldots l_\varrho \ldots l_r$ nach den Punkten $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\varrho \ldots \varepsilon_r$, in denen J logarithmisch unstetig wird. Im Folgenden nehmen wir stets an, der gemeinsame Ausgangspunkt aller Schnitte $l_1 \ldots l_r$ falle zusammen mit dem Punkte P, von dem die Schnitte $c_1 \ldots c_p$ des zu Grunde gelegten kanonischen Querschnittsystems aus-

gehen (Fig. 33). Beschränkt man die Integrationswege von J auf das Innere der so entstehenden einfach zusammenhängenden Fläche T'', so ist J eindeutige Funktion der Koordinaten seines obern Grenzpunktes (s, z).

Für das Integral J gelten mehrere wichtige Lehrsätze:

Satz I°) Das Integral $\int \tau dz$, in positiver Richtung über die ganze Begrenzung von T' erstreckt, hat den Wert Null.

Beweis: Nach einem Satze von Cauchy ist

$$\int\limits_{(T')} \tau dz = 2\pi i \text{ . mal der Summe der Residuen von } \tau \text{ innerhalb } T'.$$

Diese Summe ist aber (Satz IV°) § 12) gleich Null, und daher auch

$$2°) \qquad \int\limits_{(T')} \tau dz = 0.$$

Durch Beschränkung des Integrationsweges auf das Innere von T'' ist J zwar eindeutige Funktion des Ortes in dieser Fläche geworden, hat damit aber zugleich seine Stetigkeit verloren, indem es jetzt in zwei Punkten, die an einem der Schnitte a_λ, b_λ, c_λ $(\lambda = 1, 2 \ldots p)$, l_ϱ $(\varrho = 1, \ldots r)$ einander gegenüber liegen, Werte annimmt, die im allgemeinen von einander verschieden sind. Unterscheidet man nämlich die zwei Ränder eines jeden der $3p + r$ Schnitte a, b, c, l als $+$ Rand und $-$ Rand, wie Fig. 33 es angiebt, und bezeichnen $\overset{+}{\sigma}$ und $\overset{-}{\sigma}$ zwei Punkte, die an dem $+$ und $-$ Rand eines dieser Schnitte einander gegenüber liegen, so ist

$$\int\limits_{z_0}^{\overset{+}{\sigma}} \tau dz = \int\limits_{z_0}^{\overset{-}{\sigma}} \tau dz + \int\limits_{\overset{-}{\sigma}}^{\overset{+}{\sigma}} \tau dz = \bar{J} + \int\limits_{\overset{-}{\sigma}}^{\overset{+}{\sigma}} \tau dz,$$

wo der Integrationsweg des letzten Integrals ohne Überschreitung der Begrenzung von T'' von $\overset{-}{\sigma}$ nach $\overset{+}{\sigma}$ führen mufs. Das letzte Integral ist aber im allgemeinen von Null verschieden.

Setzen wir

$$\Delta J_\sigma = \int_{\overset{-}{\sigma}}^{\overset{+}{\sigma}} \tau \, dz,$$

so gilt der

Satz II⁰) ΔJ hat längs jedes einzelnen Schnittes a, b, c, l einen konstanten Wert.

Beweis: Liegen $\overset{+}{\sigma}$, $\overset{-}{\sigma}$ einander gegenüber auf den Rändern des Schnittes S, und bezeichnen $\overset{+}{\zeta}$, $\overset{-}{\zeta}$ zwei beliebige andere, an den Rändern desselben Schnittes S einander gegenüberliegende Punkte, so ist

$$\Delta J_\sigma - \Delta J_\zeta = \overset{+}{J}_\sigma - \overset{-}{J}_\sigma - \left(\overset{+}{J}_\zeta - \overset{-}{J}_\zeta\right)$$
$$= \overset{+}{J}_\sigma - \overset{+}{J}_\zeta - \left(\overset{-}{J}_\sigma - \overset{-}{J}_\zeta\right),$$

oder, wenn wir allgemein mit

$$\int \left| \begin{matrix} z_1 \\ L \\ z_0 \end{matrix} \right| \tau \, dz$$

ein Integral bezeichnen, dessen Integrationsweg von z_0 längs der Linie L nach z_1 führt:

$$\Delta J_\sigma - \Delta J_\zeta = \int \left| \begin{matrix} \overset{+}{\zeta} \\ S \\ \overset{+}{\sigma} \end{matrix} \right| \tau \, dz - \int \left| \begin{matrix} \overset{-}{\zeta} \\ S \\ \overset{-}{\sigma} \end{matrix} \right| \tau \, dz.$$

Da τ zu beiden Seiten von S in je zwei gegenüberliegenden Punkten denselben Wert hat, so sind die zwei Integrale rechts einander gleich, und es folgt

$$\Delta J_\sigma = \Delta J_\zeta, \text{ w. z. b. w.}$$

Die für jeden einzelnen der $3p + r$ Schnitte a, b, c, l konstante und endliche Wertdifferenz der Integralfunktion J heifst, nach Riemann, der Periodizitätsmodul von J an

dem betreffenden Schnitte. J hat also in T'' $3p+r$ Periodizitätsmoduln und zwar sei

$$
3^0) \qquad \begin{aligned}
&\text{an } a_\lambda : \Delta J = A_\lambda, \\
&\;\text{„}\;\; b_\lambda : \Delta J = B_\lambda, \\
&\;\text{„}\;\; c_\lambda : \Delta J = C_\lambda, \\
&\;\text{„}\;\; l_\varrho : \Delta J = L_\varrho .
\end{aligned}
$$

Für diese konstante Periodizitätsmoduln gelten folgende zwei Sätze:

Satz III^0) Alle C_λ ($\lambda = 1, 2 \dots p$) sind geich Null.

Beweis: Da der Periodicitätsmodul C_λ längs c_λ konstant ist, so ist es gleichgültig, an welcher Stelle von c_λ wir den Wert von C_λ bestimmen; wir wählen die Kreuzungsstelle der drei Querschnitte a_λ, b_λ, c_λ (Fig. 33). Es ist nun:

$$
\begin{aligned}
C_\lambda = J_\varepsilon - J_\delta &= J_\varepsilon - J_\alpha + J_\alpha - J_\beta + J_\beta - J_\gamma + J_\gamma - J_\delta \\
&= A_\lambda + B_\lambda - A_\lambda - B_\lambda = 0, \text{ w. z. b. w.}
\end{aligned}
$$

Die Querschnitte c_λ sind also für das Eindeutigmachen von J überflüssig.

Satz IV^0) Bezeichnen $G_1 \dots G_\varrho \dots G_r$ die Gewichte der logarithmischen Unstetigkeiten von J in den Punkten $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\varrho \dots \varepsilon_r$, so ist an l_ϱ:

$$
4^0) \qquad L_\varrho = 2\pi i \,.\, G_\varrho .
$$

Beweis: Es ist $L_\varrho = \int\limits_{\varepsilon_\varrho} \tau\, dz$, wo die Integrationsvariabele z einen (in T geschlossenen) Ringweg um den Punkt ε_ϱ durchläuft. Andererseits ist nach Definition (§ 12):

$$
\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\varepsilon_\varrho} \tau\, dz = G_\varrho ,
$$

woraus die Richtigkeit des Satzes sich ohne weiteres ergiebt.

Für die Periodizitätsmoduln des Integrals der Klasse $J = \int \tau\, dz$ haben wir so die Tabelle

5°)
$$\begin{array}{r|cccc} \text{an} & a_\lambda, & b_\lambda, & c_\lambda, & l_\varrho. \\ \hline \overset{+}{J} - \overset{-}{J} = & A_\lambda, & B_\lambda, & 0, & 2\pi i \,.\, G_\varrho. \end{array}.$$

Legt man dem Integrationswege l von $J = \int \left| \begin{matrix} a \\ e \\ a_0 \end{matrix} \right| \tau dz$ die Beschränkung auf, die Querschnitte a_λ, b_λ, c_λ und die Schnitte l_ϱ nicht zu überschreiten, so ist J in T'' eindeutig. Hebt man diese Beschränkung für l auf und läfst man l

$$\begin{array}{lllll} d_\lambda & \text{mal von} & \overset{-}{a}_\lambda & \text{zu} & \overset{+}{a}_\lambda, \\ e_\lambda & \text{,,} \quad \text{,,} & \overset{+}{a}_\lambda & \text{,,} & \overset{-}{a}_\lambda, \\ f_\lambda & \text{,,} \quad \text{,,} & \overset{-}{b}_\lambda & \text{,,} & \overset{+}{b}_\lambda, \\ g_\lambda & \text{,,} \quad \text{,,} & \overset{+}{b}_\lambda & \text{,,} & \overset{-}{b}_\lambda, \\ h_\lambda & \text{,,} \quad \text{,,} & \overset{-}{c}_\lambda & \text{,,} & \overset{+}{c}_\lambda, \\ i_\lambda & \text{,,} \quad \text{,,} & \overset{+}{c}_\lambda & \text{,,} & \overset{-}{c}_\lambda, \\ k_\varrho & \text{,,} \quad \text{,,} & \overset{-}{l}_\varrho & \text{,,} & \overset{+}{l}_\varrho, \\ m_\varrho & \text{,,} \quad \text{,,} & \overset{+}{l}_\varrho & \text{,,} & \overset{-}{l}_\varrho \end{array}$$

übergehen, so erhält J in a den Wert:

$$J = J_0 + \sum_{\lambda=1}^{p} \left\{ (d_\lambda - e_\lambda) A_\lambda + (f_\lambda - g_\lambda) B_\lambda \right\} + 2\pi i \sum_{\varrho=1}^{r} (k_\varrho - m_\varrho) G_\varrho,$$

wo J_0 den Wert bezeichnet, den J in T'' annimmt. — Dies giebt den

Satz V°) Das in T'' eindeutige Integral $J = \int \tau dz$ ist in T unendlich vieldeutig; alle Werte, die es in einem Punkte a von T annehmen kann, sind gegeben durch die Formel

6°)
$$J = J_0 + \sum_{\lambda=1}^{p} (k_\lambda A_\lambda + m_\lambda B_\lambda) + 2\pi i \,.\, \sum_{\varrho=1}^{r} n_\varrho \,.\, G_\varrho,$$

wo k_λ, m_λ, n_λ beliebige ganze Zahlen sind, und J_0 den Wert bezeichnet, den das Integral in T'' im Punkte a annimmt.

Aus diesem Satze folgt unmittelbar: ist der Integrationsweg l von J ein beliebiger, geschlossener Weg in T, so ist der Wert, den das Integral auf diesem Ringwege erreicht, eine lineare Funktion der $2p+r$ Periodizitätsmoduln mit ganzzahligen Koeffizienten.

Fassen wir das Vorhergehende kurz zusammen, so können wir sagen:

Satz VI°) Die unterscheidenden Merkmale der Funktionen der Klasse und der Integrale der Klasse sind die folgenden:

1°) Die Funktionen der Klasse werden in T nur algebraisch unstetig; die Integrale der Klasse werden in T im allgemeinen nicht nur algebraisch, sondern auch logarithmisch unstetig.

2°) Die Funktionen der Klasse sind eindeutige Funktionen des Ortes in T; die Integrale der Klasse sind in T unendlich vieldeutig, und die Werte eines Integrals der Klasse für einen bestimmten Punkt (s, z) von T unterscheiden sich um ganze Vielfache der $2p+r$ Periodizitätsmoduln A_λ, B_λ, $2\pi i \,.\, G_\varrho$.

Die in 1°) und 2°) formulierten Eigenschaften kennzeichnen umgekehrt ein Integral der Klasse, d. h.

Satz VII°) Ist von einer Funktion J nachgewiesen, dafs sie in T im allgemeinen eindeutig und stetig ist und nur in einer endlichen Anzahl von Punkten (s, z) logarithmisch unstetig oder zu endlicher Ordnung algebraisch unstetig wird, dafs sie ferner an den Querschnitten a_λ, b_λ und an den nach den logarithmischen Unstetigkeitspunkten gezogenen Schnitten l_ϱ konstante Wertdifferenzen besitzt, so ist J ein Integral der Klasse.

Beweis: Besitzt J die eben aufgezählten Eigenschaften, so ist $\frac{dJ}{dz}$ eine Funktion, die in T eindeutig ist und nur in einer endlichen Anzahl von Punkten zu endlicher Ordnung unendlich wird. Nach Satz I°) § 12 ist daher $\frac{dJ}{dz}$ eine Funktion der Klasse,*) und J selbst ein Integral der Klasse.

In den folgenden Paragraphen betrachten wir zunächst die einfachsten Integrale der Klasse. Wir unterscheiden drei Arten derselben:

1°) Integrale I. Gattung, die in T' überall eindeutig und stetig sind.

2°) Integrale II. Gattung, die in T' überall eindeutig sind und nur in einzelnen Punkten algebraisch unstetig werden.

3°) Integrale III. Gattung, die in T nur logarithmisch unstetig werden.

Wir werden diese drei Gattungen von Integralen der Reihe nach besprechen, unter Zugrundelegung der Voraussetzung, dafs T nur einfache Verzweigungspunkte und einfache Doppelpunkte besitzt.

---

§ 19. Das Integral I. Gattung.**)

Wir knüpfen an an die in § 12 gegebene Darstellung einer Funktion σ der Klasse in der Form:

1°) $$\sigma = \psi(s, z) = R + R_1 s + \ldots + R_{n-1} s^{n-1},$$

in der $R, R_1 \ldots R_{n-1}$ rationale Funktionen von z sind, und stellen uns die Aufgabe, die Funktion $\sigma = \psi(s, z)$ so zu bestimmen, dafs

2°.) $$w = \int \sigma \, dz = \int \psi(s, z) \, dz$$

---

*) Im obigen Satze bezeichnet der Ausdruck „Funktion der Klasse" kurz eine algebraische Funktion der Klasse, während derselbe Ausdruck in Satz I°) § 12 eine Funktion bezeichnet, der die Eigenschaft zukommt, in T eindeutig zu sein.

**) Christoffel: Algebraischer Beweis des Satzes von der Anzahl der linearunabhängigen Integrale I. Gattung. Annali di Matematica, Ser. 2 t. X. pag. 81—100. 1880.

in T nirgends unstetig wird. Wir setzen dabei voraus, die Grundgleichung $F\binom{n\ m}{s, z} = 0$ sei irreducibel und, wenn nötig, durch eine lineare Substitution so umgeformt (siehe § 9), dafs die Funktion s weder für $z = \infty$ unendlich werde, noch für endliche Werte von z, denen Wurzelkoincidenzen entsprechen, und dafs für $z = \infty$ keine Wurzelkoincidenz stattfinde.

Soll $w = \int \sigma\, dz$ in T nie unstetig werden, so müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1º) In einem gewöhnlichen Punkte $z = \alpha$ von T, der kein Verzweigungspunkt ist und im Endlichen liegt, muss σ stetig sein, d. h. die für diesen Punkt geltende Reihenentwickelung von σ nach ganzen Potenzen von $z - \alpha$ darf keine Potenz von $z - \alpha$ mit negativem Exponenten enthalten; für einen solchen Punkt mufs also

$$\lim\ (z - \alpha) \,.\, \sigma = 0 \text{ sein;}$$

2º) für $z = \infty$ mufs $\sigma = 0^2$ werden;

3º) ist $z = \alpha$ ein Verzweigungspunkt, so darf dort σ unstetig werden, aber nur wie $\frac{1}{\sqrt{z - \alpha}}$, so dafs für einen solchen Punkt wieder:

$$\lim\ (z - \alpha) \,.\, \sigma = 0 \text{ wird.}$$

Diese 3 notwendigen Bedingungen sind, wie unmittelbar ersichtlich, uns ausreichend, damit $w = \int \sigma\, dz$ in T nirgends unstetig werde.

Um der noch nicht näher bestimmten Funktion σ der Klasse die in den Bedingungen 1º), 2º) und 3º) verlangten Eigenschaften aufzuprägen, gehen wir aus von der Lagrangeschen Interpolationsformel

$$3º) \qquad \psi(t, z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i}{F'(s_i, z)} \cdot \frac{F(t, z)}{t - s_i},$$

aus der wir früher die allgemeine Darstellung der Funktion σ der Klasse als ganze Funktion von s und rationale Funktion von z abgeleitet haben. In dieser Formel, in der t einen beliebig, aber fest angenommenen Parameter bedeutet, be-

zeichnen $s_1 \ldots s_i \ldots s_n$ die Werte von s für ein und dasselbe unbestimmte z, $\sigma_1 \ldots \sigma_i \ldots \sigma_n$ die aus 1°) sich ergebenden zugehörigen Werte von σ.

Die durch 3°) definierte Funktion $\psi(t, z)$ ist Funktion von z allein. Wir untersuchen zunächst, wo und wie $\psi(t, z)$ als Funktion von z unstetig wird, wenn die auf der rechten Seite von 3°) auftretenden Grössen σ_i die Bedingungen 1°), 2°) und 3°) erfüllen, und wie sich unter dieser Voraussetzung der Ausdruck für $\psi(t, z)$ gestaltet.

Der zweite Faktor $\dfrac{F(t, z)}{t - s_i}$ irgend eines Summanden von ψ bleibt stetig, wenn $s_i = t$ wird, da, wegen $F(t, z) = \varphi_0 . (t - s_1)(t - s_2) \ldots (t - s_n)$, $t - s_i$ in $F(t, z)$ aufgeht. Im Endlichen kann dieser Faktor nicht weiter unstetig werden; im Unendlichen wird er $= \infty^m$. Zugleich wird aber auch $F'(s_i, z) = \infty^m$ und $\sigma_i = 0^2$; für $z = \infty$ wird also $\psi(t, z) = 0^2$, d. h. nicht unstetig. Unstetigkeiten von $\psi(t, z)$ können daher nur im Endlichen vorkommen und zwar sind sie nur dort zu erwarten, wo der erste Faktor

$$\tau_i = \frac{\sigma_i}{F'(s_i, z)}$$

irgend eines Summanden von ψ unstetig wird. Letzteres kann nur eintreten, wenn entweder

1°) σ_i unstetig wird, d. h. in den v Verzweigungspunkten von T, oder wenn

2°) $F'(s_i, z)$ Null wird, d. h. in den r Doppelpunkten und v Verzweigungspunkten von s.

Ist $z = \beta_i$ ein Verzweigungspunkt, in dem $s_1 = s_2 = \alpha_i$ wird, so werden an dieser Stelle σ_1 und σ_2 unstetig wie $(z - \beta_i)^{-\frac{1}{2}}$, während $\sigma_3, \ldots \sigma_n$ stetig bleiben; ferner werden an derselben Stelle $F'(s_1, \beta_i)$ und $F'(s_2, \beta_i)$ gleich Null wie $(z - \beta_i)^{\frac{1}{2}}$, während $F'(s_3, \beta_i), \ldots F'(s_n, \beta_i)$ von Null verschieden bleiben. Im Verzweigungspunkte (α_i, β_i) ist daher $\lim (z - \beta_i)\tau_3 = \lim (z - \beta_i)\tau_4 = \ldots = \lim (z - \beta_i)\tau_n = 0$, aber

$$\lim (z - \beta_i)\tau_1 \text{ und } \lim (z - \beta_i)\tau_2$$

weder Null noch unendlich. Bezeichnet man folglich den gemeinsamen konstanten Wert von

$$\lim (z - \beta_i) . \tau_1 = \lim \frac{\sigma_1 . (z - \beta_i)}{F'(s_1, \beta_i)}$$

$$\text{und } \lim (z - \beta_i) . \tau_2 = \lim \frac{\sigma_2 (z - \beta_i)}{F'(s_2, \beta_i)}$$

mit $\frac{1}{2} A_i$, so erhält man:

$$\lim (z - \beta_i) . \psi(t, z) = A_i . \frac{F(t, \beta_i)}{t - \alpha_i}.$$

Für $z = \beta_i$ wird demnach $\psi(t, z)$ unstetig, und zwar ist dort:

$$\psi(t, z) = A_i . \frac{F(t, \beta_i)}{(t - \alpha_i)(z - \beta_i)} + \text{functio continua.}$$

Ist $z = \beta_\varkappa$ ein Doppelpunkt, in dem etwa $s_1 = s_2 = \alpha_\varkappa$ wird, so bleiben dort $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots \sigma_n$ stetig, aber $F'(s_1, \beta_i)$ und $F'(s_2, \beta_i)$ werden $= 0$ wie $(z - \beta_i)$, während $F'(s_3, \beta_i), \ldots F'(s_n, \beta_i) \neq 0$ bleiben.

Bezeichnet man daher den gemeinsamen, konstanten Wert von

$$\lim (z - \beta_\varkappa) . \tau_1 \text{ und } \lim (z - \beta_\varkappa) . \tau_2$$

mit $\frac{1}{2} A_\varkappa$, so ist für $z - \beta_\varkappa$:

$$\lim (z - \beta_\varkappa) . \psi(t, z) = A_\varkappa . \frac{F(t, \beta_\varkappa)}{t - \alpha_\varkappa},$$

oder:

$$\psi(t, z) = A_\varkappa . \frac{F(t, \beta_\varkappa)}{(t - \alpha_\varkappa)(z - \beta_\varkappa)} + \text{functio continua.}$$

Die Funktion $\psi(t, z)$ wird also nur in den $v + r$ Doppelpunkten von s mit oder ohne Verzweigung unstetig, und zwar ist, wenn wir die Koordinaten dieser $v + r$ Punkte promiscue mit α_i, β_i bezeichnen, für einen solchen Punkt allgemein:

$$\psi(t, z) = A_i . T_i(t, z) + f. \text{ continua, wo}$$

$$4^0)\qquad T_i(t, z) = \frac{F(t, \beta_i)}{(t-\alpha_i)\,(z-\beta_i)}$$

eine Funktion ist, die für $z = \infty$ verschwindet. Es folgt hieraus, dafs die Differenz

$$\psi(t, z) - \sum_{i=1}^{v+r} A_i \,.\, T_i(t, z)$$

eine in T überall stetige Funktion von z ist, die, weil sie für $z = \infty$ verschwindet, überall den konstanten Wert Null hat.

Wir erhalten so, auf Grund der von σ zu erfüllenden Bedingungen 1^0), 2^0) und 3^0), für $\psi(t, z)$ die Ausdrucksform:

$$5^0)\quad \psi(t, z) = \sum_{i=1}^{v+r} A_i \,.\, T_i(t, z) = \sum_{i=1}^{v+r} A_i \,.\, \frac{F(t, \beta_i)}{(t-\alpha_i)\,(z-\beta_i)}.$$

Denkt man sich hierin $\frac{1}{z-\beta_i}$ nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ entwickelt:

$$\frac{1}{z-\beta_i} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{\beta_i}{z} + \frac{\beta_i^2}{z^2} + \ldots\right),$$

und berücksichtigt man, dafs infolge der Bedingung 2^0) $\psi(t, z)$ für $z = \infty$ mindestens zur zweiten Ordnung verschwindet, so sieht man, dafs zwischen den Koeffizienten A_i die einschränkende Beziehung

$$\mathrm{I}^0)\qquad \sum_{i=1}^{v+r} A_i \,.\, \frac{F(t, \beta_i)}{t-\alpha_i} = 0$$

besteht, die ausdrückt, dafs in der Entwickelung von $\psi(t, z)$ nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ der Koeffizient der ersten Potenz von $\frac{1}{z}$ fehlt.

Die Funktion $\psi(t, z)$ geht (§ 12), wenn wir in ihr den willkürlichen Parameter t durch s ersetzen, über in $\psi(s, z) = \sigma$.

Wir erhalten daher aus 5º), für die zu konstruierende Funktion σ der Klasse die Ausdrucksform:

$$6^0)\qquad \sigma = \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot T_i(s, z) = \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot \frac{F(s, \beta_i)}{(s - \alpha_i)(z - \beta_i)}.$$

Wir untersuchen, ob dieser Ausdruck unter der Voraussetzung I⁰) für die A_i, den Bedingungen genügt, die σ zu erfüllen hat.

Für $z = \infty$ wird wegen I⁰) auf jedem Blatte von $T: \sigma = 0^2$, wie es sein mufs.

Für endliche Werte von z hängt das Verhalten von σ vom Verhalten der $v + r$ Funktionen:

$$T_i(s, z) = \frac{F(s, \beta_i)}{(s - \alpha_i)(z - \beta_i)}$$

ab. Unstetigkeiten dieser Funktionen sind für endliche Werte von z nur zu erwarten, wenn von den zwei Gleichungen $s - \alpha_i = 0$, $z - \beta_i = 0$ eine erfüllt ist unter Ausschlufs der andern, oder wenn beide Gleichungen erfüllt sind, oder endlich wenn $s = \infty$ wird.

a) Wird $s = \alpha_i$, aber nicht $z = \beta_i$ (s nimmt den Wert α_i in m Punkten von T an), so ist $s - \alpha_i$ ein Wurzelfaktor des Zählers von T_i; T_i bleibt also stetig, und dasselbe gilt von σ und von $\int \sigma dz$. — Wird $z = \beta_i$, aber nicht $s = \alpha_i$ (es ist das einer der $n - 2$ Punkte, die unter den Verzweigungspunkten oder Doppelpunkten $s = \alpha_i$, $z = \beta_i$ von T liegen), so bleiben wieder T_i, σ und $\int \sigma dz$ stetig.

b) Wird zugleich $s = \alpha_i$ und $z = \beta_i$ (dies geschieht in den Verzweigungspunkten und den Doppelpunkten), so enthält der Zähler von T_i den Wurzelfaktor $s - \alpha_i$ zweimal, und T_i läfst sich schreiben in der Form:

$$T_i = \frac{s - \alpha_i}{z - \beta_i} \cdot P,$$

wo P eine Funktion ist, die für $s = \alpha_i$, $z = \beta_i$ einen bestimmten, endlichen, von Null verschiedenen Wert hat.

Ist nun $s = \alpha_i$, $z = \beta_i$ ein Verzweigungspunkt, so ist daselbst

$$s - \alpha_i = (z - \beta_i)^{\frac{1}{2}} [a_1 + a_2 (z - \beta_i)^{\frac{1}{2}} + \ldots],$$

und daher

$$\frac{s - \alpha_i}{z - \beta_i} = (z - \beta_i)^{-\frac{1}{2}} [a_1 + a_2 (z - \beta_i)^{\frac{1}{2}} + \ldots]$$

für $s = \alpha_i$, $z = \beta_i$ unstetig wie $(z - \beta_i)^{-\frac{1}{2}}$ (für $a_1 \neq 0$); dasselbe gilt für T_i und folglich auch für σ, da alle übrigen $T_k (k \neq i)$ für $s = \alpha_i$, $z = \beta_i$ stetig bleiben. $\int \sigma dz$ bleibt also jedenfalls stetig.

Ist $s = \alpha_i$, $z = \beta_i$ ein Doppelpunkt ohne Verzweigung, so hat in diesen zwei Punkten P denselben Wert, und dasselbe gilt von denjenigen $T_k (k \neq i)$, welche den Faktor $\frac{s - \alpha_i}{z - \beta_i}$ nicht enthalten. Dagegen hat $\frac{s - \alpha_i}{z - \beta_i}$, wie die Betrachtung der Reihenentwickelungen der für $s = \alpha_i$, $z = \beta_i$ gleich werdenden Wurzeln zeigt, in den zwei diesem Doppelpunkte von s entsprechenden Punkten von T, ungleiche Werte, und dasselbe gilt von T_i; da diese Werte übrigens endlich sind, so ist σ stetig in jedem Doppelpunkte.

Aus diesen Betrachtungen ergiebt sich ein für das Folgende wichtiges Resultat. Die $v + r$ Funktionen $T_i (s, z)$ sind den Verzweigungspunkten und Doppelpunkten so zugeordnet, dafs in jedem Verzweigungspunkte (α_i, β_i) die eine Funktion $T_i (s, z)$ unstetig wird, in deren Ausdruck die Koordinaten dieses Punktes auftreten, während alle übrigen dort stetig bleiben, und dafs in den zwei in T getrennten Punkten eines jeden Doppelpunktes von s die Funktion T_i ungleiche Werte annimmt, deren Ausdruck die Koordinaten dieses Punktes enthält, alle übrigen aber gleiche Werte. — Hieraus folgt:

Satz I°) Die $v + r$ Funktionen $T_i (s, z)$ sind linear-unabhängig.

Beweis: Wären diese $v + r$ Funktionen nicht linear-unabhängig, so müsste eine von ihnen, etwa T_1 sich darstellen lassen durch einen Ausdruck:

$$T_1 = \sum_{i=2}^{v=r} C_i \cdot T_i,$$

wo die C_i Konstanten bedeuten, die nicht alle Null sind. Es müsste dann nach dem Vorigen, wenn $s = \alpha_1$, $z = \beta_1$ ein Verzweigungspunkt ist, mindestens eine der $v + r - 1$ Funktionen rechts in diesem Punkte unstetig werden, und wenn $s = \alpha_1$, $z = \beta_1$ ein Doppelpunkt (ohne Verzweigung) ist, mindestens eine dieser Funktionen in den zwei zu diesem Doppelpunkte gehörigen Punkten von T ungleiche Werte annehmen. Beides ist aber unmöglich.

c) Die bis jetzt besprochenen Fälle a) und b) ziehen keine Unstetigkeit von $\int \sigma dz$ nach sich. Wird dagegen $s = \infty$, was nach unsern Voraussetzungen über die Grundgleichung $F = 0$ nur für endliche, von β_i $(i = 1, \ldots v + r)$ verschiedene Werte von z stattfinden kann, so wird jedes T_i und daher auch σ und $\int \sigma dz$ unstetig. Um diese Unstetigkeiten zu beseitigen, müssen den Koeffizienten A_i Beschränkungen auferlegt werden, die noch näher zu untersuchen sind.

Bezeichnen wie bisher $\beta_1 \ldots \beta_i \ldots \beta_{v+r}$ die Werte von z, denen die Verzweigungspunkte und Doppelpunkte von s entsprechen, so ist

$$7^{\circ}) \qquad \sigma \,.\, R(z) = \sigma \,.\, (z - \beta_1) \ldots (z - \beta_i) \ldots (z - \beta_{v+r}),$$

wie sich unmittelbar aus 6°) und aus dem Umstand, dafs für $z = \infty : \sigma = 0^2$ wird, ergiebt, eine ganze Funktion $G\left(\overset{n-1}{s}, \overset{v+r-2}{z}\right)$ von s und z von den Graden $n - 1$ und $v + r - 2$. Schreiben wir daher

$$8^{\circ}) \qquad \sigma = \frac{G\left(\overset{n-1}{s}, \overset{v+r-2}{z}\right)}{R(z)},$$

so bleibt uns noch die Aufgabe zu erledigen, die Koeffizienten der ganzen Funktion G so einzuschränken, dafs diese Funktion für $s = \infty$ nicht mehr unstetig wird.

Zu dem Zwecke schicken wir eine Vorbetrachtung voraus. Es seien f_μ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots n - 1)$ ganze Funktionen von s und z von der Form:

$$9^{\circ}) \qquad f_\mu = \varphi_0 \,.\, s^\mu + \varphi_1 \, s^{\mu - 1} + \ldots \;\; + \varphi_{\mu \, r}.$$

worin $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_\mu$ identisch sind mit den Koeffizienten der Grundgleichung

$$F\binom{n\ \ m}{s, z} = \varphi_0\, s^n + \varphi_1\, s^{n-1} + \ldots + \varphi_n = 0.$$

Schreibt man diese letztere Gleichung in der Form:

$$\varphi_0 s^\mu + \varphi_1 s^{\mu-1} + \ldots + \varphi_\mu = -\frac{\varphi_{\mu+1}}{s} - \frac{\varphi_{\mu+2}}{s^2} - \ldots - \frac{\varphi_n}{s^{n-\mu}}$$

so erkennt man sogleich, dafs die n Funktionen f_μ für $s = \infty$ nicht unstetig werden, sondern zur ersten Ordnung verschwinden, und dafs insbesondere f_n identisch gleich Null ist.

Ist nun

$$H = c s^\mu + c_1 s^{\mu-1} + \ldots + c_\mu$$

irgend eine ganze Funktion von s und z, die in s vom μ^{ten} Grade ist und daher für $s = \infty$ im allgemeinen unendlich zur Ordnung μ wird, so wird der Quotient

$$\frac{H}{f_\mu} = \frac{c s^\mu + c_1 s^{\mu-1} + \ldots + c_\mu}{\varphi_0 s^\mu + \varphi_1 s^{\mu-1} + \ldots + \varphi_\mu}$$

$$= \frac{c}{\varphi_0} + \Big[\left(c_1 - \frac{c}{\varphi_0}\varphi_1\right) s^{\mu-1} + \left(c_2 - \frac{c}{\varphi_0}\varphi_2\right) s^{\mu-2} + \ldots$$

$$+ \left(c_\mu - \frac{c}{\varphi_0}\varphi_\mu\right)\Big] : f_\mu$$

für $s = \infty$ unendlich zur Ordnung $\mu + 1$. Soll H für $s = \infty$ nicht unstetig werden oder doch zu einer geringern als der μ^{ten} Ordnung, also $\frac{H}{f_\mu}$ zu einer geringern als der $(\mu + 1)^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich werden, so darf, wenn man berücksichtigt, dafs $s = \infty$ wird nur wenn $\varphi_0 = 0$ wird, $\frac{c}{\varphi_0}$ für $s = \infty$ nicht unendlich werden, d. h. c mufs ohne Rest durch φ_0 teilbar, also

$$c = b_0 \cdot \varphi_0$$

sein, wo b_0 eine ganze Funktion von z ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so ergiebt sich:

$$H = b_0 \cdot f_\mu + (c_1 - b_0 \varphi_1) s^{\mu-1} + (c_2 - b_0 \varphi_2) s^{\mu-2} + \ldots$$
$$+ (c_\mu - b_0 \varphi_\mu)$$
$$= b_0 \cdot f_\mu + P(s, z),$$

wo P eine ganze Funktion von s und z bezeichnet, die in s nur bis zum Grade $\mu - 1$ ansteigt. Diese Funktion P wird für $s = \infty$ im allgemeinen $= \infty^{\mu-1}$; soll sie für $s = \infty$ zu einer niedrigeren Ordnung unendlich werden, so mufs, wie den vorigen analoge Betrachtungen zeigen, der Koeffizient von $s^{\mu-1}$ ohne Rest durch φ_0 teilbar sein, d. h. $P(s, z)$ sich darstellen lassen durch einen Ausdruck von der Form

$$b_1 \cdot f_{\mu-1} + P_1 (s, z),$$

wo b_1 eine ganze Funktion von z, und P_1 eine ganze Funktion von s und z ist, die in s bis zum Grade $\mu - 2$ ansteigt.

So setzt sich das fort. — Soll H für $s = \infty$ überhaupt nicht unendlich werden, so muss H die Form haben:

$$H = b_0 \cdot f_\mu (z, s) + b_1 \cdot f_{\mu-1} (s, z) + \ldots + b_{\mu-1} f_1 (s, z) + b_\mu,$$

wo $b_0, b_1 \ldots b_\mu$ ganze Funktionen von z sind.

Wendet man dieses Resultat an auf die Funktion $G\begin{pmatrix} n-1 & v+r-2 \\ s & , z \end{pmatrix}$ in 8°), so folgt: soll G für $s = \infty$ nicht unstetig werden, so mufs G notwendig die Form besitzen:

$$9°)\; G\begin{pmatrix} n-1 & v+r-2 \\ s & , \quad z \end{pmatrix} = A_0(z) \cdot f_{n-1}(s, z) + A_1(z) \cdot f_{n-2}(s, z) + \ldots$$
$$+ A_{n-2}(z) \cdot f_1(s, z) + A_{n-1}(z),$$

wo $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ ganze Funktionen von z sind, und zwar, da zufolge unserer Voraussetzungen über die Grundgleichung $F = 0 : \varphi_0$ in z vom Grade m ist, $A_0, \ldots A_{n-2}$ ganze Funktionen vom Grade $v + r - m - 2$, A_{n-1} eine Funktion vom Grade $v + r - 2$.

Welche Bedingungen müssen nun die Koeffizienten A_i in 5°) erfüllen, damit bei den eben angegebenen Graden von $A_0, A_1 \ldots A_{n-1}$ identisch

$$\text{A°)}\; \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot \frac{F(t, \beta_i)}{(t-\alpha_i)(z-\beta_i)} = \frac{1}{R(z)} \cdot \left[\sum_{\nu=0}^{n-2} A_\nu(z) \cdot f_{n-\nu-1}(t, z) + A_{n-1}(z) \right]$$

sei?

Beachtet man, dafs nach unsern Voraussetzungen über die Grundgleichung $F\binom{n \;\; m}{s, \; z} = 0$ die Wurzeln

$$\beta_1, \ldots \beta_i \ldots \beta_{v+r}$$

von $R(z)$ alle von einander verschieden sind, so liefert die Partialbruchzerfällung von

$$\frac{1}{R(z)} \cdot \left[\sum_{\nu=0}^{n-2} A_\nu \cdot f_{n-\nu-1}(t, z) + A_{n-1}(z) \right]$$

zur identischen Erfüllung von A⁹) zunächst die Bedingung:

$$10^{0}) \quad A_i \cdot \frac{F(t, \beta_i)}{t - \alpha_i} = \sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{A_\nu(\beta_i)}{R'(\beta_i)} \cdot f_{n-\nu-1}(t, \beta_i) + \frac{A_{n-1}(\beta_i)}{R'(\beta_i)},$$

wo $R'(\beta_i)$ den Wert von $\frac{dR}{dz}$ für $z = \beta_i$ bezeichnet. — Um dieser Bedingung 10⁰) eine andere Form geben zu können, betrachten wir zuvor die Funktionen f etwas genauer. Aus der Definition derselben folgt:

$$\begin{aligned}
t \cdot f_{n-1} &= F(t, \beta) - \varphi_n, \\
t \cdot f_{n-2} &= f_{n-1} - \varphi_{n-1}, \\
t \cdot f_{n-3} &= f_{n-2} - \varphi_{n-2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
t \cdot f_{n-\nu-1} &= f_{n-\nu} - \varphi_{n-\nu}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
t \cdot f_2 &= f_3 - \varphi_3, \\
t \cdot f_1 &= f_2 - \varphi_2, \\
t \cdot f_0 &= f_1 - \varphi_1.
\end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
(t - \alpha) \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha^\nu \cdot f_{n-\nu-1}(t, \beta) = F(t, \beta) &- \alpha \cdot f_{n-1} - \varphi_n \\
&+ \alpha \cdot f_{n-1} - \alpha^2 f_{n-2} - \alpha \cdot \varphi_{n-1} \\
&+ \alpha^2 \cdot f_{n-2} - \alpha^3 f_{n-3} - \alpha^2 \cdot \varphi_{n-2} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \alpha^\nu \cdot f_{n-\nu} - \alpha^{\nu+1} f_{n-\nu-1} - \alpha^\nu \varphi_{n-\nu} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \alpha^{n-2} \cdot f_2 - \alpha^{n-1} \cdot f_1 - \alpha^{n-2} \varphi_2 \\
&+ \alpha^{n-1} \cdot f_1 - \alpha^n \cdot f_0 - \alpha^{n-1} \varphi_1,
\end{aligned}$$

oder, mit Weglassung der sich aufhebenden Glieder:

$$(t-\alpha)\cdot\sum_{\nu=0}^{n-1}\alpha^\nu f_{n-\nu-1}(t,\beta)=F(t,\beta)-K,$$

wo

$$K=\alpha^n\cdot f_0+\varphi_1\cdot\alpha^{n-1}+\varphi_2\cdot\alpha^{n-2}+\dots$$
$$+\varphi_{n-\nu}\cdot\alpha^{n-\nu}+\dots+\varphi_{n-1}\cdot\alpha\,.+\varphi_n,$$

oder, da $f_0=\varphi_0(\beta)$:

$$K=\varphi_0(\beta)\cdot\alpha^n+\varphi_1(\beta)\cdot\alpha^{n-1}+\dots+\varphi_n(\beta)=F\binom{n\;\;m}{\alpha,\beta}=0$$

ist, da $s=\alpha$ eine der Wurzeln von $F\binom{n\;\;m}{s,z}=0$ ist, die zu $z=\beta$ gehören. Wir haben somit die Beziehung:

$$(t-\alpha)\cdot\sum_{\nu=0}^{n-1}\alpha^\nu\cdot f_{n-\nu-1}(t,\beta)=F(t,\beta),$$

oder

$$\frac{F(t,\beta)}{t-\alpha}=\sum_{\nu=0}^{n-1}\alpha^\nu\cdot f_{n-\nu-1}(t,\beta),$$

die für $\alpha=\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_{v+r}$, $\beta=\beta_1,\beta_2\dots\beta_{v+r}$ gilt. — Mit Benutzung dieser Beziehung geht die von den Koeffizienten A_i zu erfüllende Bedingung 10°) über in:

$$11^0)\qquad A_i\cdot\sum_{\nu=0}^{n-2}\alpha_i^\nu\cdot f_{n-\nu-1}(t,\beta_i)+A_i\cdot\alpha_i^{n-1}\cdot\varphi_0(\beta_i)$$
$$=\sum_{\nu=0}^{n-2}\frac{A_\nu(\beta_i)}{R'(\beta_i)}\cdot f_{n-\nu-1}(t,\beta_i)+\frac{A_{n-1}(\beta_i)}{R'(\beta_i)}.$$

Da diese Bedingung für jeden Wert von t identisch erfüllt sein mufs, so müssen die beiderseitigen Koeffizienten gleicher Potenzen von t dieselben sein. Da ferner beiderseits t^{n-1} in $f_{n-1}(t,\beta_i)=\varphi_0(\beta_i)\cdot t^{n-1}+\dots$ den, wegen unserer Voraussetzungen über die Grundgleichung $F=0$, von Null verschiedenen Koeffizienten $\varphi_0(\beta_i)$ hat, so mufs

$$A_i=\frac{A_0(\beta_i)}{R'(\beta_i)}$$

sein, d. h. die beiderseitigen Koeffizienten von $f_{n-1}(t,\beta_i)$ in 11°) müssen einander gleich sein. Nimmt man beiderseits

das Glied mit f_{n-1} weg, so ergiebt sich ebenso die Gleichheit der Koeffizienten von f_{n-2} u. s. w. — Man erhält so zur identischen Erfüllung von A$^0_.$) die Bedingungen:

$$\text{B}^0_.)\quad \begin{cases} \dfrac{A_\nu(\beta_i)}{R'(\beta_i)} = A_i \,.\, \alpha_i^\nu, & (\nu = 0, 1, 2 \ldots n-2) \\ \dfrac{A_{n-1}(\beta_i)}{R'(\beta_i)} = A_i \,.\, \alpha_i^{n-1}\varphi_0(\beta_i), \end{cases}$$

für $i = 1, 2 \ldots v + r$. — Berücksichtigt man weiter, daſs die Partialbruchzerfällungen von $\dfrac{A_\nu(z)}{R(z)}$ und $\dfrac{A_{n-1}(z)}{R(z)}$ von der Form:

$$\frac{A_\nu(z)}{R(z)} = \sum_{i=1}^{v+r} \frac{A_\nu(\beta_i)}{R'(\beta_i)} \cdot \frac{1}{z-\beta_i}, \qquad (\nu = 0, 1, 2 \ldots n-2)$$

$$\frac{A_{n-1}(z)}{R(z)} = \sum_{i=1}^{v+r} \frac{A_{n-1}(\beta_i)}{R'(\beta_i)} \cdot \frac{1}{z-\beta_i}$$

sind, so sieht man sogleich ein, daſs die Bedingungen B$^0_.$) sich ersetzen lassen durch die folgenden:

$$\text{C}^0_.)\quad \begin{cases} \dfrac{A_\nu(z)}{R(z)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{v+r} \frac{A_i \,.\, \alpha_i^\nu}{z-\beta_i}, & (\nu = 0, 1, \ldots n-2), \\ \dfrac{A_{n-1}(z)}{R(z)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{v+r} \frac{A_i \,.\, \alpha_i^{n-1} \,.\, \varphi_0(\beta_i)}{z-\beta_i}. \end{cases}$$

Die hierin auftretenden ganzen Funktionen A_ν, A_{n-1} und R sind, wie schon erwähnt, in z von den Graden $v + r - m - 2$, $v + r - 2$ und $v + r$. Denkt man sich daher die linken Seiten von C$^0_.$) entwickelt nach Potenzen von z, so enthalten diese Entwickelungen nur Potenzen von z mit negativen Exponenten, und zwar beginnt die absteigende Entwickelung von $\dfrac{A_\nu(z)}{R(z)}$ mit einem Glied mit z^{-m-2}, die von $\dfrac{A_{n-1}(z)}{R(z)}$ mit einem Gliede mit der Potenz z^{-2}. Entwickelt man auch die rechten Seiten von C$^0_.$), so muſs somit in der Entwickelung von $\displaystyle\sum_{i=1}^{v+r} \frac{A_i \,.\, \alpha_i^\nu}{z-\beta_i}$ die Summe aller Glieder ver-

schwinden, die z zu einem Exponenten $-k > -m-2$ enthalten, d. h. es mufs sein:

$$\sum_{i=1}^{v+r} A_i \,.\, \alpha_i^\nu \,.\, \beta_i^\mu = 0, \quad \text{für} \begin{cases} \nu = 0, 1, 2 \ldots n-2, \\ \mu = 0, 1 \ldots m. \end{cases}$$

Analog mufs in der Entwickelung der rechten Seite der zweiten Bedingung C$^0_.$) die Summe aller Glieder mit z^{-1} verschwinden. An Stelle von C$^0_.$) erhalten wir so die Bedingungen:

$$\text{II}^0_.) \qquad \sum_{i=1}^{v+r} A_i \,.\, \alpha_i^\nu \beta_i^\mu = 0, \quad \text{für} \begin{cases} \nu = 0, 1, \ldots n-2, \\ \mu = 0, 1, \ldots m. \end{cases}$$

$$\text{III}^0_.) \qquad \sum_{i=1}^{v+r} A_i \,.\, \alpha_i^{n-1} \,.\, \varphi_0(\beta_i) = 0.$$

Diese Bedingungen sind eine unmittelbare Folge von C$^0_.$). Sind umgekehrt diese Bedingungen II$^0_.$) und III$^0_.$) erfüllt, so liefert C$^0_.$) die Funktionen A mit den in A$^0_.$) vorgeschriebenen Graden in z, während zugleich A$^0_.$) erfüllt ist, wenn B$^0_.$) erfüllt ist, und B$^0_.$), wenn C$^0_.$) erfüllt ist. Die Bedingungen II$^0_.$) und III$^0_.$) sind also die n o t w e n d i g e n und a u s r e i c h e n d e n B e d i n g u n g e n dafür, dafs

$$\sigma = \psi(s, z) = \sum_{i=1}^{v+r} A_i \,.\, \frac{F(s, \beta_i)}{(s-\alpha_i)\ (z-\beta_i)}$$

für $s = \infty$ n i c h t u n s t e t i g wird.

Fassen wir das Bisherige zusammen, so haben wir folgendes Resultat:

Jeder Integrand I. Gattung σ läfst sich in die Form bringen:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{v+r} A_i \,.\, \frac{F(s, \beta_i)}{(s-\alpha_i)\ (z-\beta_i)} = \sum_{i=1}^{v+r} A_i \,.\, T_i(s, z),$$

wo die T_i linearunabhängig und die A_i konstant sind. Umgekehrt ist aber ein Ausdruck dieser Form nur dann ein Integrand I. Gattung, wenn die Bedingungen erfüllt sind:

$$\text{I}^0_.) \qquad \sum_{i=1}^{v+r} A_i \,.\, \frac{F(t, \beta_i)}{t-\alpha_i} = 0, \text{ für jedes } t;$$

$$\text{II}^0) \quad \sum_{i=1}^{v+r} A_i \,.\, \alpha_i^\nu \,.\, \beta_i^\mu = 0, \text{ für } \begin{cases} \nu = 0, 1, \ldots n-2, \\ \mu = 0, 1, \ldots m. \end{cases}$$

$$\text{III}^0) \qquad \sum_{i=1}^{v+r} A_i \,.\, \alpha_i^{n-1} \,.\, \varphi_0(\beta_i) = 0.$$

Die Frage, die sich nun aufwirft, ist die: sind diese Bedingungen alle von einander unabhängig, oder sind eine oder mehrere von ihnen Folge der übrigen? Ist letzteres der Fall, so müssen diese überzähligen Bedingungsgleichungen aus dem System der Bedingungen I^0), II^0) und III^0) weggelassen werden.

Bedeutet $g\begin{pmatrix} n-2 & m \\ s &, z \end{pmatrix}$ irgend eine ganze Funktion von s und z von den angeschriebenen Graden, so ist

$$g(\alpha_i, \beta_i) = \sum_{\nu=0}^{n-2} \sum_{\mu=0}^{m} c_{\nu\mu} \,.\, \alpha_i^\nu \beta_i^\mu.$$

Das System der $(n-1)(m+1) = (n-1)(m-1) + 2(n-1) = r + p + 2(n-1) = r + v - p$ Bedingungsgleichungen II^0) läfst sich also dadurch ersetzen, dafs man verlangt, es solle für jede ganze Funktion $g\begin{pmatrix} n-2 & m \\ s &, z \end{pmatrix}$ sein:

$$\text{II}_a^0) \qquad \sum_{i=1}^{v+r} A_i \,.\, g\begin{pmatrix} n-2 & m \\ \alpha_i &, \beta_i \end{pmatrix} = 0.$$

Berücksichtigt man nun, dafs

$$\frac{1}{n} \,.\, F'(s, z) = \varphi_0(z) \,.\, s^{n-1} + g\begin{pmatrix} n-2 & m \\ s &, z \end{pmatrix},$$

und daher

$$\frac{1}{n} \,.\, A_i \,.\, F'(s, z) = A_i \,.\, \varphi_0(z) \,.\, s^{n-1} + A_i \,.\, g\begin{pmatrix} n-2 & m \\ s &, z \end{pmatrix}$$

ist, so ergiebt die Forderung II$_a^0$):

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{v+r} \,.\, A_i \,.\, F'(\alpha_i, \beta_i) = \sum_{i=1}^{v+r} A_i \,.\, \varphi_0(\beta_i) \,.\, \alpha_i^{n-1},$$

und weiter, da $F'(\alpha_i, \beta_i) = 0$ ist:

$$\sum_{i=1}^{v+r} A_i \,.\, \alpha_i^{n-1} \,.\, \varphi_0(\beta_i) = 0.$$

Die Bedingung III_i^0) ist daher eine Folge von II_a^0) oder II_i^0) und deshalb wegzulassen.

Ferner ist die Bedingung I_i^0) der Ausdruck dafür, dafs

$$\psi(t, z) - \sum_{i=1}^{v+r}{}' A_i \cdot \frac{F(t, \beta_i)}{(t - \alpha_i)(z - \beta_i)}$$

gleich 0^2 wird, für $z = \infty$. Sind aber die Bedingungen II_i^0) und die aus ihnen fliefsenden Bedingungen III_i^0), welche das identische Erfülltsein von A_i^0) mit den früher geforderten Grade von $A_0, \ldots A_{n-2}, A_{n-1}$ in z nach sich ziehen, erfüllt, so folgt aus eben diesen Graden der Funktionen A, dafs $\psi(t, z)$ für $z = \infty$ gleich 0^2 wird. Die Bedingung I_i^0) ist also ebenfalls eine Folge der Bedingungen II_i^0).

Wir haben uns somit nur noch mit diesen Bedingungen II_i^0) zu beschäftigen, um festzustellen, ob dieselben überzählige Gleichungen enthalten oder nicht.

Die Gleichungen des Systems II_i^0) sind in den unbekannten Koeffizienten A_i linear und homogen. Enthält ein solches System überzählige Gleichungen, so giebt es stets ein System von Multiplikatoren, die nicht alle Null sind, und die Eigenschaft besitzen, dafs bei Multiplikation der Gleichungen II_i^0) mit diesen Multiplikatoren und nachherige Addition alle Unbekannten A_i herausfallen. Ersetzt man dann das System der $v + r - p$ Gleichungen II_i^0) durch die eine Gleichung II_a^0) und nimmt man in dieser die vorigen Multiplikatoren zu Koeffizienten von $g\left(\overset{n-2}{s}, \overset{m}{z}\right)$, so wird

$$g\left(\overset{n-2}{\alpha_i}, \overset{m}{\beta_i}\right) = 0,$$

ohne dafs alle Koeffizienten von g Null sind. Die Funktion g wird dann also Null in allen Verzweigungspunkten und allen Doppelpunkten von s, besitzt also $v + 2r$ Nullpunkte in T. Dies sind aber auch sämtliche Nullpunkte von g in T. Denn g wird ∞^m für $z = \infty$ in jedem der n Blätter von T, und ausserdem noch m-mal (nämlich für $s = \infty$) ∞^{n-2}, und bleibt sonst überall stetig. g ist also von der Ordnung $m \cdot n + m(n - 2) = 2m(n - 1) = v + 2r$.

Berücksichtigt man weiter, dafs $F'(s, z)$ dieselben Null- und Unstetigkeitspunkte hat wie g und zu denselben Ordnungen, so folgt:

$$\frac{g}{F'}$$

ist eine Funktion der Klasse, die in T weder Null noch unstetig wird und daher überall denselben von Null verschiedenen konstanten Wert C hat. Es ist also

$$g - C \,.\, F' = 0,$$

oder, wenn wir durch $-C$ dividieren und den Faktor $-\frac{1}{C}$ mit g vereinigen:

$$g + F' = 0.$$

Enthält daher das System II^0) überzählige Gleichungen, so genügen die Wurzeln s der irreducibeln Gleichung $F\binom{n\ \ m}{s, z} = 0$ auch einer Gleichung niedrigeren Grades

$$12^0)\qquad g\binom{n-2\ \ m}{s\quad\ , z} + F'(s, z) = 0,$$

die in z ebenfalls rational ist. Da dies mit der vorausgesetzten Irreducibilität von $F\binom{n\ \ m}{s, z} = 0$ in Widerspruch steht, so haben wir den

Satz II^0) Das System der $v + r - p$ Gleichungen:

$$\text{II}^0)\qquad \sum_{i=1}^{v+r} A_i \,.\, \alpha_i^{\nu} \beta_i^{\mu} = 0 \qquad \begin{cases} \nu = 0, 1, \ldots n-2, \\ \mu = 0, 1, \ldots m, \end{cases}$$

enthält keine überzähligen Gleichungen.

Die Gleichungen II^0) erlauben es also, $v + r - p$ der $v + r$ Unbekannten A_i durch die p übrigen, willkürlich bleibenden linear und homogen auszudrücken. Ausgenommen hiervon ist der Fall $p = 0$, in dem alle $A_i = 0$ sind, und ein Integral I. Gattung daher gar nicht existiert. Sind $A_1 \ldots A_\varkappa \ldots A_p$ die willkürlich bleibenden Koeffizienten, so lassen sich die andern A_λ $(\lambda > p)$ darstellen in der Form:

$$A_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{p} A_\varkappa \,.\, \varDelta_{\varkappa\lambda},$$

wo die $\varDelta_{\varkappa\gamma}$ bekanntlich Quotienten von Determinanten sind. — Mit Einführung der Bezeichnung:

$$T_\varkappa(s,z) + \sum_{\lambda=1}^{p} \varDelta_{\varkappa\lambda} \,.\, T_\lambda(s,z) = w'_\varkappa$$

ergiebt sich nun:

13.⁰) $\sigma = \psi(s,z) = A_1 w'_1 + A_2 \,.\, w'_2 + \ldots + A_\varkappa w'_\varkappa + \ldots + A_p \,.\, w'_p.$

Infolge der Willkürlichkeit von $A_1, \ldots A_p$ sind $w'_1 \ldots w'_p$ Integranden I. Gattung, aufserdem sind sie, ebenso wie die T_i, linearunabhängig. Dies liefert den fundamentalen

Satz III.⁰) Ist die Grundgleichung $F\binom{n\ m}{s,z} = 0$ irreducibel, so sind die $v + r - p$ Gleichungen

II.⁰) $$\sum_{i=1}^{v+r} A_i \,.\, \alpha_i^\nu \,.\, \beta_i^\mu = 0 \qquad \begin{cases} \nu = 0, 1, \ldots n-2, \\ \mu = 0, 1, \ldots m, \end{cases}$$

von einander unabhängig, und jeder vermittelst dieser Gleichungen der Grundgleichung $F = 0$ zugeordnete Integrand I. Gattung ist von der Form:

14.⁰) $$\sigma = \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot \frac{F(s, \beta_i)}{(s-\alpha_i)(z-\beta_i)};$$

die Anzahl der linearunabhängigen Integranden I. Gattung ist stets gleich p, und speziell $= 0$ für $p = 0$.

Die hier abgeleitete Form 14.⁰) des Integranden I. Gattung ist nicht die seit Riemann gebräuchliche. Um diese zu erhalten, bilden wir den Ausdruck:

15.⁰) $$\varphi(t,z) = \sum_{\varkappa=1}^{n} \sigma_\varkappa \cdot \frac{F(t,z)}{t - s_\varkappa}.$$

Diese Funktion $\varphi(t,z)$ ist ganze Funktion von t, und zwar höchstens vom Grade $n-1$, und rationale Funktion von z. Für $t = s_\varkappa$ bleibt sie endlich und ebenso für $\sigma = \infty$. Denn, wenn $\sigma = \infty$ wird für $z = \gamma$, so ist $\lim (z-\gamma) \,.\, \sigma = 0$, also auch $\lim (z-\gamma) \,.\, \varphi = 0$ für $z = \gamma$. Da ferner für $z = \infty : \sigma = 0^2$

und $\dfrac{F(t,z)}{t - s_\varkappa} = \infty^m$ wird, so ist für $z = \infty : \varphi = \infty^{m-2}$.

φ ist also eine rationale Funktion von z, die für endliche Werte von z nicht unendlich wird, für $z = \infty$ aber $= \infty^{m-2}$ wird, und daher eine ganze Funktion von z vom Grade $m - 2$.

Setzt man nun

$$\varphi(t, z) = C \,.\, t^{n-1} + C_1 t^{n-2} + \dots \quad + C_{n-1},$$

so folgt, da $F(t, z) = \varphi_0 \,.\, (t - s_1) \dots (t - s_n)$ ist, aus der Definition von φ:

$$C = \varphi_0 \,.\, \sum_{\varkappa=1}^{n} \sigma_\varkappa.$$

Hierin ist $S = \sum_{\varkappa=1}^{n} \sigma_\varkappa$:

1°) einwertige Funktion von z; denn wenn z in der komplexen Zahlenebene einen Ringweg beschreibt, so ändert sich nur die Reihenfolge der Summanden von S;

2°) eine überall endliche Funktion von z; denn für jedes beliebige $z = \alpha$ ist $\lim (z - \alpha) \,.\, \sigma = 0$. Als einwertige, überall endliche Funktion von z ist daher S eine Konstante, und zwar $= 0$, da für $z = \infty$ alle $\sigma_\varkappa = 0^2$ werden. — Es ist daher $C = 0$, und

$$16^\circ) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \sigma_\varkappa \,.\, \frac{F(t, z)}{t - s_\varkappa} = \varphi\left(t^{n-2}, z^{m-2}\right).$$

Berücksichtigt man weiter, dafs in irgend einem Doppelpunkte $s = \gamma$, $z = \delta$ von s, in dem etwa $s_1 = s_2 = \gamma$, $s_3 = \gamma_3, \dots$ wird:

$$\begin{aligned}\sum_{\varkappa=1}^{n} \sigma_\varkappa \,.\, \frac{F(t, \delta)}{t - s_\varkappa} = \sigma_1 \,.\, & \frac{\varphi_0 \,.\, (t-\gamma)^2 \,.\, (t - \gamma_3) \dots (t - \gamma_n)}{t - \gamma} \\ + \sigma_2 \,.\, & \frac{\varphi_0 \,.\, (t-\gamma)^2 \,.\, (t - \gamma_3) \dots (t - \gamma_n)}{t - \gamma} \\ + \sigma_3 \,.\, & \frac{\varphi_0 \,.\, (t-\gamma)^2 \,.\, (t - \gamma_3) \dots (t - \gamma_n)}{t - \gamma_3} \\ + & \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

ist, so folgt: die Funktion $\varphi\binom{n-2\quad m-2}{t\quad ,\, z}$ wird in allen Doppelpunkten $(\gamma_\varrho, \delta_\varrho)$ $(\varrho = 1, 2 \ldots r)$ von s Null zur ersten Ordnung. — Eine mit s derart verbundene Funktion $\varphi\binom{n-2\quad m-2}{s\quad ,\, z}$, dafs sie in allen Doppelpunkten von s gleich 0[1] wird, heifst seit Riemann, eine φ-Funktion.

Läfst man $t = s_1$ werden, so geht $\frac{F(t, z)}{t - s_1}$ über in $F'(s_1, z)$, und man erhält:

$$\sigma_1 \,.\, F'(s_1, z) = \varphi(s_1, z).$$

Analog ergiebt sich allgemein:

$$\sigma_\varkappa \,.\, F'(s_\varkappa, z) = \varphi(s_\varkappa, z) \qquad (\varkappa = 1, 2 \ldots n).$$

Hieraus folgt: $\qquad \sigma \,.\, F'(s, z) = \varphi(s, z)$

oder

17⁰) $$\sigma = \frac{\varphi\binom{n-2\quad m-2}{s\quad ,\, z}}{F'(s, z)}.$$

Das ist die Riemann'sche Form der Integranden I. Gattung. — Der Zähler φ ist an die Bedingung gebunden, dafs für jeden Doppelpunkt $s = \gamma_\varrho$, $z = \delta_\varrho$ $\quad (\varrho = 1, 2 \ldots r)$

II^0_b) $$\varphi(\gamma_\varrho, \delta_\varrho) = 0$$

ist, und diese Bedingungsgleichungen, in Verbindung mit den angeschriebenen Graden von φ in s und z sind umgekehrt auch ausreichend, damit $\sigma = \frac{\varphi}{F'}$ ein Integrand I. Gattung sei.

Nach Satz III⁰) giebt es bei irreducibeler Grundgleichung $F = 0$ vom Geschlecht p stets $p = (m-1)(n-1) - r$ linear-unabhängige Integranden I. Gattung. Die r Gleichungen II^0_b) zwischen den $(m-1)(n-1)$ Koeffizienten von φ enthalten also keine überzählige Gleichung, d. h.

Satz IV⁰) Ist die Grundgleichung $F\binom{n\ \ m}{s, z} = 0$ irreducibel, so ist die Anzahl r und die Lage der Doppelpunkte (γ, δ) eine solche, dafs sich unter den r Gleichungen II^0_b) keine überzählige findet.

Hieraus folgt: das Gleichungssystem II_b^0) hat mindestens eine, von Null verschiedene Auflösungsdeterminante von der Ordnung r.

Bezeichnet man die p linearunabhängigen Integranden I. Gattung, deren Existenz und Ausdrucksform im Vorigen nachgewiesen wurde, mit $w_1', w_2', \ldots w_p'$, so läfst sich jeder Integrand I. Gattung w' darstellen in der Form:

18°) $\quad w' = c_1 w_1' + c_2 w_2' + \ldots + c_p w_p' +$ konstans,

wo die $c_1 \ldots c_p$ konstante Koeffizienten bezeichnen.

Jeder dieser p linearunabhängigen Integranden I. Gattung liefert ein Integral I. Gattung; das giebt p linearunabhängige Integrale I. Gattung

$$w_1 = \int w_1' dz, w_2 = \int w_2' dz, \ldots w_p = \int w_p' dz,$$

durch welche sich jedes Integral I. Gattung w ausdrücken läfst in der Form:

19°) $\quad w = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_p w_p +$ konstans.

Aus der Linearunabhängigkeit der p Integrale I. Gattung $w_1, \ldots w_p$ folgt aufserdem:

Satz V°) Die Gleichung:

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_p w_p = \text{konstans}$$

kann nur erfüllt werden, indem man sämtliche Koeffizienten $c_1 \ldots c_p$ gleich Null setzt.

§ 20. Die Periodizitätsmoduln der Integrale I. Gattung.

Jedes Integral I. Gattung w ist eindeutig in der einfach zusammenhängenden Fläche T' und besitzt an den Querschnitten dieser Fläche konstante Periodizitätsmoduln. Sind $w_1 \ldots w_p$ p linearunabhängige Integrale I. Gattung, und ist

$$\text{an } a_\lambda: \overset{+}{w}_\varkappa - \overset{-}{w}_\varkappa = A_{\varkappa\lambda},$$

$$\text{,, } b_\lambda: \overset{+}{w}_\varkappa - \overset{-}{w}_\varkappa = B_{\varkappa\lambda}, \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots p),$$

$$\text{,, } c_\lambda: \overset{+}{w}_\varkappa - \overset{-}{w}_\varkappa = 0,$$

so hat $$w = \sum_{\varkappa=1}^{p} c_\varkappa \,.\, w_\varkappa + \text{konstans}$$

an a_λ den Periodizitätsmodul $A_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{p} c_\varkappa \,.\, A_{\varkappa\lambda}$,

„ b_λ „ „ $B_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{p} c_\varkappa \,.\, B_{\varkappa\lambda}$,

„ c_λ „ „ $C_\lambda = 0$.

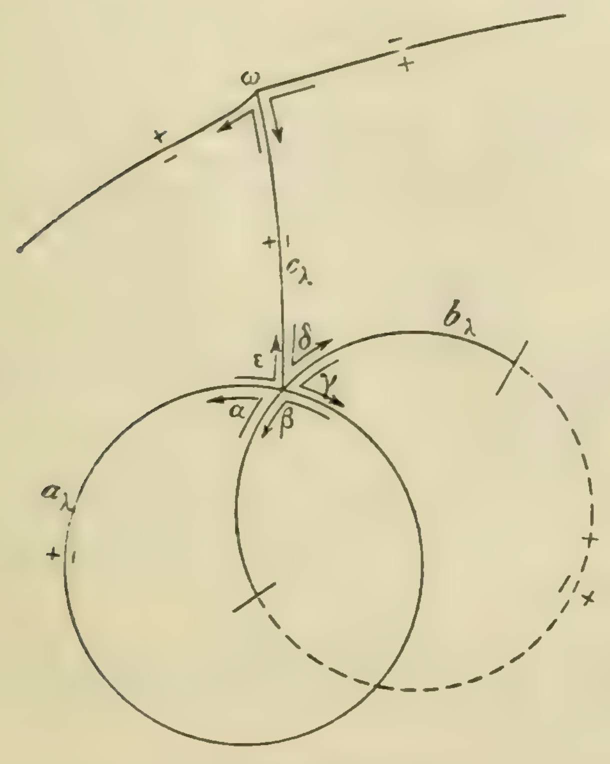


Fig. 34.

Hierin ist (siehe Fig. 34):

$$A_{\varkappa\lambda} = \int \left| \begin{matrix} \gamma \\ b \\ \beta \end{matrix} \right|_\lambda w'_\varkappa \,.\, dz$$

$$B_{\varkappa\lambda} = \int \left| \begin{matrix} \alpha \\ a \\ \beta \end{matrix} \right|_\lambda w'_\varkappa \,.\, dz.$$

Im Folgenden leiten wir über die Periodizitätsmoduln der Integrale I. Gattung eine Reihe von Sätzen ab, deren Beweis auf der Anwendung des sogenannten Green'schen Satzes beruht.

Bezeichnen U und V zwei reelle Funktionen von x und y, die ebenso wie ihre Derivierten innerhalb einer zusammenhängenden, von einer oder mehreren geschlossenen Kurven C begrenzten Fläche S, eindeutig und stetig sind, so ist bekanntlich nach dem Green'schen Satz*):

$$1^{0}) \quad \iint_{(S)} \left(\frac{dV}{\partial x} - \frac{dU}{\partial y}\right) dx \,.\, dy = \int_{(C)} (U \,.\, dx + V dy),$$

wo die Integration links sich über sämtliche Flächenelemente von S, die Integration rechts in positiver Richtung über sämtliche Randkurven C von S erstreckt.

Es sei nun

$$f(z) = X + iY$$

eine innerhalb S und auf ihrem Rande C eindeutige und stetige Funktion von $z = x + iy$, so dafs Gleiches auch von ihren Derivierten gilt.

Setzt man in 1⁰)

$$U = X \frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad V = X \frac{\partial Y}{\partial y},$$

so erhält man:

$$\iint_{(S)} \left\{ \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} \right\} dx \,.\, dy = \int_{(C)} X \,.\, dY,$$

oder, da

$$2^{0}) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = - \frac{\partial Y}{\partial x}$$

ist:

$$3^{0}) \quad \iint_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 \right\} dx \,.\, dy = \int_{(C)} X \,.\, \partial Y.$$

---

*) Siehe etwa: Durège, Elemente der Theorie der Funktionen, oder Neumann: Abel'sche Integrale, pag. 8 und 26.

Die einzelnen Elemente des Integrals links sind positiv, also auch das ganze Integral. Dieses kann nur dann Null werden, wenn jedes Element Null ist, d. h. wenn überall in S

$$\frac{\partial X}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial X}{\partial y}$$

Null sind. Zufolge 2?) müssen dann aber auch

$$\frac{\partial Y}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial Y}{\partial y}$$

überall in S gleich Null sein. Dies liefert den

Hilfssatz: Ist $f(z) = X + iY$ auf einer Fläche S eindeutig und stetig, so hat das Integral

$$\int_{(C)} X . dY,$$

in positiver Richtung über den Rand C von S erstreckt, einen Wert, der stets positiv ist und nur dann Null wird, wenn $f(z)$ innerhalb S überall denselben konstanten Wert hat.

Die einfach zusammenhängende Fläche T' hat, wie der vorige Hilfssatz es von S verlangt, eine geschlossene Randkurve, und in T' ist das Integral I. Gattung w eindeutig und stetig. Auf T' und w läfst sich also dieser Hilfssatz anwenden. Ist daher, nach Zerlegung in seinen reellen und seinen imaginären Bestandteil:

$$4^0) \qquad w = u + iv,$$

so folgt: das Integral $\int_{(T')} u . dv$ ist stets positiv und nur dann Null, wenn w sich auf eine Konstante reduziert.

Dieses Randintegral $\int_{(T')} u dv$ lässt sich durch die Periodizitätsmoduln von w in T' ausdrücken.

Bedeuten allgemein P, Q Funktionen, die, welches auch ihr Verhalten im Innern von T' sei, an den Querschnitten a_λ, b_λ konstante Periodizitätsmoduln haben, so zwar, dafs

$$\text{an } a_\lambda: \overset{+}{P} - \overset{-}{P} = \alpha_\lambda, \ \overset{+}{Q} - \overset{-}{Q} = \alpha'_\lambda,$$

$$\text{„ } b_\lambda: \overset{+}{P} - \overset{-}{P} = \beta_\lambda, \ \overset{+}{Q} - \overset{-}{Q} = \beta'_\lambda,$$

$$\text{„ } c_\lambda: \overset{+}{P} - \overset{-}{P} = 0, \ \overset{+}{Q} - \overset{-}{Q} = 0,$$

sei, so ist (Fig. 34)

$$\int\limits_{(T')} P\,.\,dQ =$$

$$\sum_{\lambda=1}^{p}\left\{\int\left|\begin{matrix}\alpha\\a\\\beta\end{matrix}\right|_{\lambda}\left(\overset{+}{P}.\,d\overset{+}{Q}-\overset{-}{P}.\,d\overset{-}{Q}\right)+\int\left|\begin{matrix}\gamma\\b\\\beta\end{matrix}\right|_{\lambda}\left(\overset{-}{P}.\,d\overset{-}{Q}-\overset{+}{P}.\,d\overset{+}{Q}\right)\right.$$

$$\left.+\int\left|\begin{matrix}\delta\\c\\\omega\end{matrix}\right|_{\lambda}\left(\overset{-}{P}.\,d\overset{-}{Q}-\overset{+}{P}.\,d\overset{+}{Q}\right)\right\}$$

Da an allen Querschnitten $d\overset{+}{Q}=d\overset{-}{Q}$ ist, so erhalten wir, wenn wir dafür kurz dQ schreiben:

$$\int\limits_{(T')} P\,.\,dQ=\sum_{\lambda=1}^{p}\left\{\int\left|\begin{matrix}\alpha\\a\\\beta\end{matrix}\right|_{\lambda}\left(\overset{+}{P}-\overset{-}{P}\right)dQ\right.$$

$$\left.-\int\left|\begin{matrix}\gamma\\b\\\beta\end{matrix}\right|_{\lambda}\left(\overset{+}{P}-\overset{-}{P}\right)dQ-\int\left|\begin{matrix}\delta\\c\\\omega\end{matrix}\right|_{\lambda}\left(\overset{+}{P}-\overset{-}{P}\right)dQ\right\},$$

und zufolge der Periodizitätseigenschaften von P:

$$\int\limits_{(T')} P\,.\,dQ=\sum_{\lambda=1}^{p}\left\{\alpha_{\lambda}\,.\int\left|\begin{matrix}\alpha\\a\\\beta\end{matrix}\right|_{\lambda}dQ-\beta_{\lambda}\,.\int\left|\begin{matrix}\gamma\\b\\\beta\end{matrix}\right|_{\lambda}dQ\right\}.$$

Berücksichtigt man schliefslich, dafs

$$\beta'_{\lambda}=\int\left|\begin{matrix}\alpha\\a\\\beta\end{matrix}\right|_{\lambda}dQ,\quad \alpha'_{\lambda}=\int\left|\begin{matrix}\gamma\\b\\\beta\end{matrix}\right|_{\lambda}dQ$$

ist, so ergiebt sich das Resultat:

$$5^{0})\qquad \int\limits_{(T')} P\,.\,dQ=\sum_{\lambda=1}^{p}\left(\alpha_{\lambda}\,.\,\beta'_{\lambda}-\alpha'_{\lambda}\beta_{\lambda}\right).$$

Wendet man dies an auf das Integral I. Gattung $w = u + iv$ mit den Periodizitätseigenschaften:

$$\text{an } a_\lambda: \overset{+}{w} - \overset{-}{w} = A_\lambda = \alpha_\lambda + i\alpha'_\lambda,$$

$$\text{,, } b_\lambda: \overset{+}{w} - \overset{-}{w} = B_\lambda = \beta_\lambda + i\beta'_\lambda,$$

so erhält man:

$$6^0) \qquad \int_{(T')} u\,dv = \sum_{\lambda=1}^{p} (\alpha_\lambda \,.\, \beta'_\lambda - \alpha'_\lambda \,.\, \beta_\lambda),$$

und der obige Hilfssatz liefert den

Satz I⁰) Besitzt das Integral I. Gattung w
an a_λ den Periodizitätsmodul: $A_\lambda = \alpha_\lambda + i\alpha'_\lambda$,
,, b_λ ,, ,, : $B_\lambda = \beta_\lambda + i\beta'_\lambda$,
so ist die Summe

$$\sum_{\lambda=1}^{p} (\alpha_\lambda \,.\, \beta'_\lambda - \alpha'_\lambda \,.\, \beta_\lambda)$$

stets positiv und wird nur dann Null, wenn w sich auf eine Konstante reduziert.

Bemerkung: Bildet man T' mit Hilfe von $w = u + iv$ auf eine w-Ebene ab mit der Abscissenachse u und der Ordinatenachse v, so liefert $\int_{(T')} u\,dv$ oder $\sum_\lambda (\alpha_\lambda \beta'_\lambda - \alpha'_\lambda \,.\, \beta_\lambda)$ den Flächeninhalt des Bildes von T'.

Aus Satz 1⁰) ergiebt sich eine Reihe von Folgerungen.

Die Summe $\sum_\lambda (\alpha_\lambda \beta'_\lambda - \alpha'_\lambda \beta_\lambda)$ wird Null u. a.:

1⁰) wenn alle α_λ und alle α'_λ, also auch alle A_λ gleich Null sind;

2⁰) wenn alle β_λ und alle β'_λ, also auch alle B_λ gleich Null sind;

3⁰) wenn für p Werte von λ entweder $\alpha_\lambda = \alpha'_\lambda = 0$ oder $\beta_\lambda = \beta'_\lambda = 0$ ist;

4⁰) wenn alle α_λ und alle β_λ gleich Null sind, w also nur rein imaginäre Periodizitätsmoduln besitzt;

5°) wenn alle α'_λ und alle β'_λ gleich Null sind, und w daher nur reelle Periodizitätsmoduln besitzt;

6°) wenn an einigen Querschnitten $\alpha_\lambda = \beta_\lambda = 0$, und an allen andern $\alpha'_\lambda = \beta'_\lambda = 0$ ist.

Auf Grund von Satz I°) folgt hieraus unter anderm:

Folgerung I°): Besitzt ein Integral I. Gattung w an p von den $2p$ Querschnitten a_λ, b_λ Periodizitätsmoduln, die $= 0$ sind, so reduziert w sich auf eine Konstante.

Folgerung II°): Sind die Periodizitätsmoduln eines Integrals I. Gattung w entweder alle rein reell, oder alle rein imaginär, so reduziert w sich auf eine Konstante.

Wendet man diese Folgerungen auf den Fall $p = 1$ an, so erhält man bekannte Resultate. — Alle Integrale I. Gattung lassen sich in diesem Falle durch eines derselben, w, ausdrücken, und dieses hat nur zwei Periodizitätsmoduln A und B.

Aus Folgerung I°) ergiebt sich dann: weder A noch B darf Null sein.

Aus Folgerung II°) ergiebt sich: das Verhältnis $\frac{A}{B}$ darf nicht reell sein; denn sonst würde $\frac{w}{A}$ ein Integral I. Gattung sein, von dessen Periodizitätsmoduln der eine $= 1$ und der andere ebenfalls reell wäre, was bei nicht konstantem w unmöglich ist. Das Verhältnis $\frac{A}{B}$ muss also eine komplexe Konstante sein, von der zwar der reelle, nicht aber der imaginäre Bestandteil verschwinden darf.

Aus Folgerung I°) ergiebt sich ferner:

Satz II°) Ein Integral I. Gattung w ist, bis auf eine additive Konstante, vollständig bestimmt, wenn p Periodizitätsmoduln desselben an irgend p von den $2p$ Querschnitten a_λ, b_λ gegeben sind, vorausgesetzt, dafs diese p Periodizitätsmoduln nicht alle Null sind.

Beweis: Haben zwei Integrale I. Gattung w und W an denselben p Querschnitten dieselben Periodizitätsmoduln, so ist die Differenz $w - W$ ein Integral I. Gattung, das sich nach Folgerung I⁰) auf eine Konstante reduziert. w und W können sich daher nur um eine konstante Gröfse unterscheiden.

Ebenso erhält man aus Folgerung II⁰):

Satz III⁰) Ein Integral I. Gattung w ist, bis auf eine additive Konstante, vollständig bestimmt, wenn die $2p$ reellen oder die $2p$ rein imaginären Bestandteile seiner sämtlichen Periodizitätsmoduln an allen $2p$ Querschnitten a_λ, b_λ gegeben sind.

Die Sätze II⁰) und III⁰) zeigen, dafs die $2p$ Periodizitätsmoduln eines Integrales I. Gattung nicht von einander unabhängig sind. Aber auch zwischen den Periodizitätsmoduln je zweier Integrale I. Gattung W_1, W_2 besteht eine Beziehung, die wir ableiten wollen.

Bildet man das Integral

$$\int_{(T)} W_1 \, . \, d\,W_2$$

in positiver Richtung über den Rand von T' erstreckt, so ist nach Gleichung 5⁰):

$$\int_{(T)} W_1 \, . \, d\,W_2 = \sum_{\lambda=1}^{p} (A_{1\lambda} B_{2\lambda} - A_{2\lambda} B_{1\lambda}),$$

wenn $A_{1\lambda}$, $B_{2\lambda}$ die Periodizitätsmoduln von W_1, $A_{2\lambda}$, $B_{2\lambda}$ die von W_2 an a_λ, b_λ bezeichnen. Andererseits ist aber auch nach einem Satze von Cauchy:

$\int_{(T)} W_1 \, . \, d\,W_2 = 2\pi i$ mal der Summe der Residuen von

$$W_1 \, . \, \frac{d\,W_2}{dz} \text{ in } T',$$

und diese Residuensumme ist Null, da $W_1 \, . \, \dfrac{d\,W_2}{dz}$ in T' überhaupt kein von Null verschiedenes Residuum besitzt. — Wir haben so den

Satz IV⁰) Zwischen den Periodizitätsmoduln $A_{1\lambda}$, $B_{1\lambda}$ und $A_{2\lambda}$, $B_{2\lambda}$ $(\lambda = 1, 2 \ldots p)$ zweier Integrale I. Gattung W_1 und W_2 besteht die bilineare Beziehung:

$$7^0) \qquad \sum_{\lambda=1}^{p} (A_{1\lambda} B_{2\lambda} - A_{2\lambda} B_{1\lambda}) = 0.$$

Zwischen den $2p^2$ Periodizitätsmoduln von p linearunabhängigen Integralen I. Gattung bestehen also $\frac{1}{2} p(p-1)$ solcher bilinearen Relationen.

Die Beziehung 7⁰) ergiebt sich auch sehr leicht direkt aus dem Green'schen Satze.

Mit Hilfe des Schlufssatzes des vorigen Paragraphen wollen wir nun noch ein für das Folgende wichtiges Resultat ableiten.

Bezeichnen $w_1 \ldots w_\varkappa \ldots w_p$ irgend p linearunabhängige Integrale I. Gattung mit den Periodizitätsmoduln $A_{\varkappa\lambda}$, $B_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa, \lambda = 1, 2 \ldots p)$, so stellt jeder Ausdruck von der Form

$$w = c_1 w_1 + c_2 w_2 \ldots \quad + c_p w_p + \text{konst.},$$

worin die c konstante Koeffizienten sind, wieder ein Integral I. Gattung dar. Diese Koeffizienten $c_1 \ldots c_p$ denken wir uns nun so bestimmt, dafs die Periodizitätsmoduln von w an p beliebigen Querschnitten, etwa an $a_1, a_2 \ldots a_p$ gleich Null werden. Die entsprechenden Werte von $c_1 \ldots c_p$ sind dann die Wurzeln der p linearen und homogenen Gleichungen:

$$\begin{array}{l} c_1 A_{11} + c_2 A_{21} + \ldots \quad + c_p A_{p1} = 0, \\ c_1 A_{12} + c_2 A_{22} + \ldots \quad + c_p A_{p2} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_1 A_{1p} + c_2 A_{2p} + \ldots \quad + c_p \,.\, A_{pp} = 0. \end{array}$$

Werden $c_1 \ldots c_p$ hieraus berechnet, so reduziert sich w, nach Folgerung I⁰), auf eine Konstante. Dies ist aber nach dem Schlufssatze des vorigen § nur möglich, wenn alle Koeffizienten $c_1 \ldots c_p$ Null werden. Die Wurzeln des vorigen Gleichungssystems sind daher alle $= 0$, und dies ist nur möglich, wenn die Auflösungsdeterminante:

$$8^{0}) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{p1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{p2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1p} & A_{2p} & \dots & A_{pp} \end{vmatrix}$$

des Systems von Null verschieden ist. Dies giebt den wichtigen

Satz V⁰) Die Determinante Δ der Periodizitätsmoduln von p linearunabhängigen Integralen I. Gattung an p beliebigen der $2p$ Querschnitte a_λ, b_λ ($\lambda = 1, 2 \dots p$) ist stets verschieden von Null.

Aus diesem Satze folgt unmittelbar, dafs wir die Koeffizienten $c_1 \dots c_p$ so bestimmen können, dafs das Integral

$$w = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_p w_p + \text{konstans}$$

an p willkürlich gewählten Querschnitten a_λ oder b_λ vorgeschriebene Periodizitätsmoduln erhält, nur dürfen, wenn w sich nicht auf eine Konstante reduzieren soll, diese p Periodizitätsmoduln nicht alle $= 0$ sein. Ist so über die $c_1 \dots c_p$ Verfügung getroffen, so ist, in Übereinstimmung mit Satz II⁰) dieses Paragraphen, w bis auf eine additive Konstante bestimmt; namentlich sind auch die übrigen p Periodizitätsmoduln von w bestimmt.

Dieser Satz läfst sich umkehren. Wir gehen jedoch hierauf nicht ein, wollen vielmehr hier noch mit kurzen Worten auf den Zusammenhang hinweisen, der zwischen der gegenwärtigen Theorie und der Theorie der periodischen Funktionen besteht.

Es seien

$$w_1, w_2, \dots w_p$$

p linearunabhängige Integrale I. Gattung, deren Periodizitätsmoduln durch das Schema:

9⁰)

	a_1	$a_2 \dots$	$a_\lambda \dots$	a_p	b_1	$b_2 \dots$	$b_\lambda \dots$	b_λ
w_1	A_{11}	$A_{12} \dots$	$A_{1\lambda} \dots$	A_{1p}	B_{11}	$B_{12} \dots$	$B_{1\lambda} \dots$	B_{1p}
w_2	A_{21}	$A_{22} \dots$	$A_{2\lambda} \dots$	A_{2p}	B_{21}	$B_{22} \dots$	$B_{2\lambda} \dots$	B_{2p}
..	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
w_μ	$A_{\mu 1}$	$A_{\mu 2} \dots$	$A_{\mu p} \dots$	$A_{\mu p}$	$B_{\mu 1}$	$B_{\mu 2} \dots$	$B_{\mu\lambda} \dots$	$B_{\mu p}$
..	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
w_p	A_{p1}	$A_{p2} \dots$	$A_{p\lambda} \dots$	A_{pp}	B_{p1}	$B_{p2} \dots$	$B_{p\lambda} \dots$	B_{pp}

gegeben seien. Das System der mit den $2p$ ganzen Zahlen $g_1 \dots g_p$, $h_1 \dots h_p$ gebildeten p Ausdrücke:

$$10^0) \quad (gh)_\mu = \sum_{\lambda=1}^{p} (g_\lambda A_{\mu\lambda} + h_\lambda B_{\mu\lambda}), \qquad (\mu = 1, 2 \dots p)$$

heifst dann ein System von zusammengehörigen oder simultanen Periodiziätsmoduln der p Integrale $w_1 \dots w_p$, weil diese Integrale w_μ, wenn man sie längs desselben Integrationsweges zwischen denselben unteren und oberen Grenzen erstreckt denkt und als Funktionen ihrer oberen Grenze auffafst, sich (siehe § 18) gleichzeitig um Ausdrücke von der Form 10⁰) ändern, wenn man ihren Integrationswegen gleiche Änderungen erteilt.

Angenommen nun, es sei gelungen, eine Funktion

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_p)$$

von p unabhängigen Variabelen $x_1 \dots x_p$ herzustellen, welche die Eigenschaft hat:

1⁰) eine einwertige Funktion von $x_1 \dots x_p$ zu sein, und

2⁰) periodisch zu sein gemäfs der Gleichung:

$$11^0) \quad \varphi[x_1 + (gh)_1, x_2 + (gh)_2, \dots x_p + (gh)_p] = \varphi(x_1, x_2 \dots x_p).$$

Die Funktion φ ist dann $2p$-fach periodische Funktion von $x_1 \dots x_p$, und ihre Perioden sind die $2p$ Periodizitätsmoduln von $w_1 \dots w_p$, wie man sogleich sieht, wenn man in 11⁰) von den $2p$ ganzen Zahlen $g_1 \dots g_p$, $h_1 \dots h_p$ der Reihe eine gleich 1 und alle übrigen gleich 0 annimmt. — Dafs es solche Funktionen φ giebt, folgt aus der Theorie der höheren ϑ-Funktionen; dafs einwertige Funktionen von p unabhängigen Variabelen höchstens $2p$-fach periodisch sein können, hat zuerst Hermite (1843), später Riemann bewiesen.

Denkt man sich nun in φ an Stelle von $x_1 \dots x_p$ die linearunabhängigen Integrale $w_1 \dots w_p$ eingesetzt, so erhält man aus 11⁰):

$$12^0) \quad \varphi[w_1 + (gh)_1, \dots w_p + (gh)_p] = \varphi(w_1, \dots w_p).$$

Als einwertige Funktion der in T'' eindeutigen Integrale $w_1 \dots w_p$ ist $\varphi(w_1 \dots w_p)$ in T' eindeutig; die Gleichung 12⁰)

sagt aber weiter aus, dafs $\varphi(w_1 \ldots w_p)$ auch in T eindeutig ist, wofern der Integrationsweg in T für alle p Integrale der nämliche ist. Dies giebt den

Satz VI°) Eine einwertige Funktion von p unabhängigen Variabelen, die $2p$-fach periodisch ist, und deren $2p$ Periodensysteme die Systeme

$$\begin{matrix} A_{1\lambda}, & A_{2\lambda}, & \ldots & A_{p\lambda}, \\ B_{1\lambda}, & B_{2\lambda}, & \ldots & B_{p\lambda}, \end{matrix} \qquad (\lambda = 1, 2 \ldots p)$$

der Periodizitätsmoduln von p linearunabhängigen Integralen $w_1 \ldots w_p$ sind, verwandelt sich in eine wie T verzweigte Funktion von z, wenn man an Stelle der ursprünglichen Variabelen diese p Integrale I. Gattung setzt.

Über eine Umkehrung dieses Satzes siehe: Thetafunktionen u. hyperelliptische Funktionen § 9, Satz I°).

§ 21. Die p Normalintegrale I. Gattung.

Wie schon im vorigen Paragraphen bemerkt wurde, können wir durch geeignete Verfügung über die Koeffizienten $c_1 \ldots c_p$ jedem Integrale I. Gattung

$$1°) \qquad w = c_1 w_1 + \ldots + c_p w_p + \text{konst.}$$

p Periodizitätsmoduln nach Belieben vorschreiben, nur dürfen diese Moduln nicht alle gleich 0 sein. Diese Möglichkeit benutzen wir, um Integrale I. Gattung mit möglichst einfachen Periodizitätseigenschaften herzustellen.

Wir bilden p Integrale I. Gattung:

$$2°) \qquad u_1, \ldots u_\mu, \ldots u_p,$$

indem wir die Koeffizienten $c_1 \ldots c_p$ so bestimmen, dafs u_μ $(\mu = 1, \ldots p)$ an allen Querschnitten a_λ $(\lambda \neq \mu)$ den Periodizitätsmodul 0, an a_μ aber den Modul πi hat. Die p so erhaltenen Integrale I. Gattung $u_1 \ldots u_p$ heifsen die p Normalintegrale I. Gattung. Bezeichnen wir allgemein den Periodizitätsmodul von u_μ an b_λ mit $a_{\mu\lambda}$, so wird das

System der Periodizitätsmoduln der p Normalintegrale dargestellt durch das Schema:

3°)

	a_1	a_2	...	a_μ	...	a_p	b_1	b_2	...	b_μ	...	b_p
u_1	πi	0	...	0	...	0	a_{11}	a_{12}	...	$a_{1\mu}$	...	a_{1p}
u_2	0	πi	...	0	...	0	a_{21}	a_{22}	...	$a_{2\mu}$	...	a_{2p}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
u_μ	0	0	...	πi	...	0	$a_{\mu 1}$	$a_{\mu 2}$	...	$a_{\mu\mu}$	...	$a_{\mu p}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
u_p	0	0	...	0	...	πi	a_{p1}	a_{p2}	...	$a_{p\mu}$	...	a_{pp}.

Die Normalintegrale $u_1 \dots u_\mu \dots u_p$ lassen sich leicht durch die als gegeben angenommenen linearunabhängigen Integrale $w_1 \dots w_\mu \dots w_p$ und die Periodizitätsmoduln $A_{\mu\lambda}$, $B_{\mu\lambda}$ $(\mu, \lambda = 1, 2 \dots p)$ derselben ausdrücken. Versteht man nämlich unter dem Symbol $\binom{\lambda}{\mu}$ die Null oder die Einheit, je nachdem $\lambda \neq \mu$ oder $\lambda = \mu$ ist, so müssen zur Herstellung von u_μ die Koeffizienten $c_1 \dots c_p$ bestimmt werden aus dem Gleichungssystem:

$$c_1 A_{11} + c_2 A_{21} + \dots + c_k . A_{k1} + \dots + c_p . A_{p1} = \binom{1}{\mu} \pi i,$$

$$c_1 . A_{12} + c_2 A_{22} + \dots + c_k A_{k2} + \dots + c_p . A_{p2} = \binom{2}{\mu} . \pi i,$$

. . . .

$$c_1 A_{1p} + c_2 . A_{2p} + \dots + c_k A_{kp} + \dots + c_p A_{pp} = \binom{p}{\mu} \pi i.$$

Bezeichnet man die Subdeterminanten $\dfrac{\partial \varDelta}{\partial A_{k\lambda}}$ $(k, \lambda = 1, 2 \dots p)$ der Auflösungsdeterminante $\varDelta$ dieses Gleichungssystems mit $\varDelta_{k\lambda}$, so ergiebt sich:

$$\varDelta . c_k = \pi i . \varDelta_{k\mu}, \qquad (k = 1, 2 \dots p)$$

und hieraus:

$$4°)\quad u_\mu = \frac{\pi i}{\varDelta} (\varDelta_{1\mu} w_1 + \varDelta_{2\mu} w_2 + \dots + \varDelta_{p\mu} w_p) + \text{konst.}$$

$$\text{für } \mu = 1, 2 \dots p.$$

Es gilt ferner der

Satz I°) Die p Normalintegrale I. Gattung $u_1 \ldots u_p$ sind linearunabhängig.

Beweis: Bestünde zwischen $u_1 \ldots u_p$ eine Beziehung von der Form

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_p u_p = \text{konst.},$$

wo die Koefizienten $C_1 \ldots C_p$ nicht alle gleich Null sind, so hätte $\sum_{\lambda=1}^{p} C_\lambda u_\lambda$ am Querschnitt $a_\varrho (\varrho = 1, \ldots p)$ den Periodizitätsmodul Null; dieser Modul ist aber andererseits $= C_\varrho . \pi i$. Es müfsten also alle Koeffizienten $C_\varrho (\varrho = 1 \ldots p)$ gleich Null sein. Die Annahme, die Integrale $u_1 \ldots u_p$ seien nicht linearunabhängig, schliefst daher einen Widerspruch in sich.

Aus 4°) folgt weiter:

$$5°) \quad a_{u\lambda} = \frac{\pi i}{\varDelta} (\varDelta_{1u} . B_{1\lambda} + \varDelta_{2u} . B_{2\lambda} + \ldots + \varDelta_{p\lambda} . B_{p\lambda}),$$

und durch Vertauschung von μ und λ:

$$5_a°) \quad a_{\lambda u} = \frac{\pi i}{\varDelta} (\varDelta_{1\lambda} . B_{1u} + \varDelta_{2\lambda} . B_{2u} + \ldots + \varDelta_{p\lambda} . B_{pu}),$$

wo die Klammerausdrücke sich, wie leicht ersichtlich, auch in Determinantenform schreiben lassen. — Für diese Periodizitätsmoduln gilt der

Satz II°) Es ist:

$$6°) \qquad a_{u\lambda} = a_{\lambda u}.$$

Beweis: Nach Satz IV°), § 20 besteht zwischen den Perioditätsmoduln zweier Integrale I. Gattung W_1 und W_2 die bilineare Beziehung:

$$\sum_{\lambda=1}^{p} (A_{1\lambda} B_{2\lambda} - A_{2\lambda} B_{1\lambda}) = 0.$$

Nimmt man für W_1 und W_2 die zwei Normalintegrale u_μ und u_λ, so reduziert sich

$$\sum_{\lambda=1}^{p} A_{1\lambda} B_{2\lambda} \text{ auf } \pi i . a_{\lambda u},$$

und

$$\sum_{\lambda=1}^{p} A_{2\lambda} B_{1\lambda} \text{ auf } \pi i . a_{\mu\lambda}.$$

Die obige Beziehung lautet also jetzt:

$$\pi i (a_{\lambda\mu} - a_{\mu\lambda}) = 0,$$

oder $$a_{\mu\lambda} = a_{\lambda\mu}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Um eine weitere wichtige Eigenschaft der Periodizitätsmoduln der p Normalintegrale $u_1 \ldots u_p$ abzuleiten, bilden wir das Integral I. Gattung:

$$w = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_p u_p,$$

worin $c_1 \ldots c_p$ reelle Gröfsen seien. Bezeichnen, in ihre reellen und imaginären Bestandteile zerlegt,

$$\alpha_\lambda + i\alpha'_\lambda, \qquad \beta_\lambda + i\beta'_\lambda,$$

die Periodizitätsmoduln von w an a_λ, b_λ, so ist

$$\alpha_\lambda + i\alpha'_\lambda = c_\lambda . \pi i, \qquad \text{d. h. } \alpha_\lambda = 0, \qquad \alpha'_\lambda = \pi . c_\lambda,$$

$$\beta_\lambda + i\beta'_\lambda = \sum_{\mu=1}^{p} c_\mu a_{\mu\lambda}.$$

Bildet man mit diesen Periodizitätsmoduln die Summe:

$$\sum_{\lambda=1}^{p} (\alpha_\lambda \beta'_\lambda - \alpha'_\lambda . \beta_\lambda),$$

so reduziert sich dieselbe auf:

$$-\pi . \sum_{\lambda=1}^{p} c_\lambda . \beta_\lambda$$

oder, wenn wir mit $\alpha_{\mu\lambda}$ den reellen Teil von $a_{\mu\lambda}$ bezeichnen, auf

$$7^0) \qquad -\pi . \sum_{\lambda=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{p} \alpha_{\mu\lambda} . c_\lambda . c_\mu .$$

Nach Satz I⁰), § 20 ist aber $\sum_{\lambda} (\alpha_\lambda \beta'_\lambda - \alpha'_\lambda \beta_\lambda)$ stets positiv und nur dann Null, wenn w sich auf eine Konstante reduziert. Die Doppelsumme

$$S = \sum_{\lambda=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{p} \alpha_{\mu\lambda} c_\lambda c_\mu$$

ist also stets negativ und wird nur dann Null, wenn alle Koeffizienten $c_1 \ldots c_p$ Null sind. Als Funktion von $c_1 \ldots c_p$ aufgefafst, ist S eine reelle quadratische Form dieser Koeffizienten, und zwar, da sie nur dann Null wird, wenn alle Variabelen $c_1 \ldots c_p$ Null werden, eine vollständige Form. — Wir haben so den für später sehr wichtigen

Satz III°) Bezeichnet $a_{\mu\lambda}$ den Periodizitätsmodul von u_μ an b_λ, und bedeuten $c_1 \ldots c_p$ reelle Gröfsen, so ist der reelle Teil von

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{p} a_{\mu\lambda} c_\lambda c_\mu$$

eine vollständige negative quadratische Form der p reellen Variabelen $c_1 \ldots c_p$.

Dieser Satz wird später bei der Frage nach der Konvergenz der Riemann'schen Thetareihe ausschlaggebend sein.

Die im Vorigen eingeführten Normalintegrale I. Gattung $u_1 \ldots u_p$ enthalten jedes noch eine verfügbare Konstante. In späteren Untersuchungen werden wir öfters zur Vereinfachung der Resultate über die in jedem Normalintegrale u_μ enthaltene Konstante so verfügen, dafs die n Werte, die u_μ in den n unendlich fernen Punkten von T annimmt, die Null zur Summe haben. Die Normalintegrale sind dann vollständig bestimmt; wir nennen sie mit Christoffel die definitiv normierten Integrale I. Gattung.

Das System der Normalintegrale $u_1 \ldots u_p$ ist nicht das einzige, das sich zu einer gegebenen Fläche T' konstruieren läfst. Ordnet man die erste Determinante der Periodizitätsmodulen des Schemas 3°) nicht den p Querschnitten a_λ, sondern beliebigen p Querschnitten aus der Reihe a_λ, b_λ $(\lambda = 1 \ldots p)$ zu, so erhält man bei fest angenommener Lage der $2p$ Querschnitte a_λ, b_λ im ganzen:

$$(2p)_p = \frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1.2.3\ldots.p}$$

Systeme von je p Normalintegralen I. Gattung. Aufserdem aber läfst sich das System der $2p$ Querschnitte a_λ, b_λ auf ∞-viele Arten durch ein anderes äquivalentes ersetzen, das T ebenfalls in eine einfach zusammenhängende Fläche

T' verwandelt; zu jedem dieser Querschnittsysteme gehört dieselhe endliche Anzahl $(2p)_p$ von Systemen von Normalintegralen I. Gattung und also auch von Periodizitätsmodulen $a_{\mu\lambda}$. Die Theorie der linearen Transformation (oder auch der unendlich vielen Formen) der Thetafunktion gründet sich auf das eingehendere Studium des Zusammenhanges zwischen den zu zwei verschiedenen kanonischen Querschnittsystemen gehörigen Normalintegralen I. Gattung und Periodizitätsmodnln $a_{\mu\lambda}$.

---

§ 22. Das Christoffel'sche Integral $P(o, \varepsilon)$.*)

Aufser den Normalintegralen I. Gattung, deren Existenz und Konstruktion wir in den letzten drei Paragraphen nachgewiesen haben, sind die einfachsten Integralfunktionen diejenigen, die wir als Integrale II. und III. Gattung früher definiert haben. Um zu ihnen zu gelangen, konstruieren wir zunächst ein von Christoffel in die Theorie der Abel'schen Funktionen eingeführtes Integral der Klasse mit speziellen Unstetigkeitseigenschaften; aus demselben ergeben sich, wie wir später sehen werden, auf sehr einfache Weise die sogenannten Normalintegrale II. und III. Gattung. — Wir stellen uns folgende

Aufgabe: Eine Funktion τ der Klasse so zu bestimmen, dafs ihr Integral $J = \int \tau dz$ in T überhaupt nicht algebraisch unstetig wird und logarithmische Unstetigkeiten nur besitzt in **einem** im Endlichen gelegenen Punkte $\varepsilon\,(s = \sigma, z = \zeta)$ und in den n unendlich fernen Punkten von T, so zwar, dafs

$$\text{in } \varepsilon\,(\sigma, \zeta): \; J = G \,.\, \log(z - \zeta) + \text{functio continua},$$

$$\text{in } \infty_\varkappa (\varkappa = 1 \ldots n): \; J = H \,.\, \log z + \text{functio continua} \quad \text{ist.}$$

Soll J diese Eigenschaften besitzen, so mufs der Integrand τ folgende Bedingungen erfüllen:

---

*) Die Ausführungen dieses Paragraphen schliefsen sich eng an eine Vorlesung von Christoffel über Abel'sche Funktionen an. Siehe aufserdem: Christoffel, Brioschi's Annalen. Ser. 2. t. X, 1880.

1°) im Endlichen mufs

in ε: $$\tau = \frac{G}{z - \zeta} + \text{funct. cont.},$$

und für jeden andern Punkt $z = \alpha$: $\lim (z - \alpha)\,\tau = 0$ sein.

2°) in $\infty_\varkappa\ (\varkappa = 1, \ldots n)$ mufs

$$\tau = \frac{H}{z} + \frac{\gamma_\varkappa}{z^2} + \frac{\gamma'_\varkappa}{z^3} + \ldots \text{ sein.}$$

Dazu kommt noch nach Satz IV°), § 12, die Bedingung

3°) $$G = n\,H.$$

Im Folgenden nehmen wir $G = 1$ an; nach 3°) mufs dann $H = \frac{1}{n}$ sein.

Zur Lösung unserer Aufgabe bilden wir nun den Ausdruck:

I°) $$\psi(t, z) = \sum_{\varkappa = 1}^{n} \tau_\varkappa \cdot \frac{F(t, z)}{t - s_\varkappa},$$

worin t einen beliebigen, fest angenommenen Parameter bedeutet, während $s_1 \ldots s_\varkappa \ldots s_n$ die einem beliebigen z entsprechenden Werte von s und $\tau_1 \ldots \tau_\varkappa \ldots \tau_n$ die gleichzeitigen Werte von τ bezeichnen.

Da $F(t, z) = \varphi_0\,(t - s_1)(t - s_2) \ldots (t - s_n)$ ist, so ergiebt sich unmittelbar, dafs

A°) $$\psi(s_\mu, z) = \tau_\mu \,.\, F'(s_\mu, z), \quad \text{für } \mu = 1, 2 \ldots n$$

oder $$\psi(s, z) = \tau \,.\, F'(s, z) \quad \text{ist.}$$

Der Ausdruck $\psi(t, z)$ liefert uns also, nachdem wir ihn auf Grund der von τ zu erfüllenden Bedingungen ausgearbeitet haben, eine Darstellungsform für τ. — Wir untersuchen $\psi(t, z)$, unter Berücksichtigung der für τ aufgestellten Bedingungen, als Funktion von t und als Funktion von z.

α°) $\psi(t, z)$ als Funktion von t.

Aus $F(t, z) = \varphi_0 \cdot (t - s_1) \ldots (t - s_n)$ folgt, dafs in jedem Summanden von $\psi(t, z)$ der Faktor $\frac{F(t, z)}{t - s_\varkappa}$ eine ganze

Funktion von t vom Grade $n-1$ ist; dasselbe gilt also auch von $\psi(t, z)$, so daſs wir schreiben können:

a⁰) $$\psi(t, z) = V . t^{n-1} + V_1 t^{n-2} + \ldots + V_{n-1},$$

wo die Koeffizienten $V, \ldots V_{n-1}$ nur noch Funktionen von z sind. Der erste Koeffizient V dieser Entwickelung läſst sich folgenderweise bestimmen.

Aus

$$V t^{n-1} + \ldots + V_{n-1} = \sum_{\varkappa=1}^{n} \tau_\varkappa . \frac{\varphi_0(z) . (t - s_1) \ldots (t - s_n)}{t - s_\varkappa}$$

folgt zunächst

$$V = \varphi_0(z) . \sum_{\varkappa=1}^{n} \tau_\varkappa = \varphi_0(z) . S.$$

Die Summe $S = \sum_{\varkappa=1}^{n} \tau_\varkappa$ ist:

1) einwertige Funktion von z, denn ihre Summanden vertauschen nur ihre Reihenfolge, wenn z in der komplexen Zahlenebene einen Ringweg beschreibt;

2) sie wird im Endlichen nur unstetig im Punkte ε, und zwar ist für $z = \zeta$, $s = \sigma$:

$$S = \frac{1}{z - \zeta} + \text{functio cont.} = \frac{1}{z - \zeta} + S_1,$$

wo S_1, ebenso wie S, einwertige Funktion von z ist, die aber im Endlichen nie unstetig wird, also eine ganze Funktion von z ist.

Nun ist für $z = \infty$:

$$\tau_\varkappa = \frac{1}{n} . \frac{1}{z} + \frac{\gamma_\varkappa}{z^2} + \frac{\gamma'_\varkappa}{z^3} + \ldots ,$$

und daher $$S = \frac{1}{z} + \frac{\Sigma \gamma_\varkappa}{z^2} + \frac{\Sigma \gamma'_\varkappa}{z^3} + \ldots,$$

$$S_1 = \frac{1}{z} + \frac{\Sigma \gamma_\varkappa}{z^2} + \frac{\Sigma \gamma'_\varkappa}{z^3} + \ldots - \frac{1}{z - \zeta},$$

oder, wenn man $\frac{1}{z - \zeta}$ nach Potenzen von z entwickelt:

$$S_1 = \frac{\Sigma \gamma_\varkappa - \zeta}{z^2} + \frac{\Sigma \gamma'_\varkappa - \zeta^2}{z^3} + \ldots;$$

S_1 verschwindet also für $z = \infty$. Als ganze, nirgends unstetige Funktion von z ist daher S_1 eine Konstante, und zwar $= 0$, da sie im Unendlichen verschwindet. Hieraus

folgt
$$S = \frac{1}{z - \zeta},$$

und

b$^\circ$)
$$V = \frac{\varphi_0(\zeta)}{z - \zeta}.$$

β°) $\psi(t, z)$ als Funktion von z:

Als Funktion von z ist $\psi(t, z)$:

1°) einwertig; beschreibt nämlich z in der komplexen Zahlenebene einen Ringweg, so bilden die Endwerte der $s_\varkappa$ eine Permutation der Anfangswerte, und die Endwerte der $\tau_\varkappa$ dieselbe Permutation ihrer Anfangswerte; ein solcher Ringweg führt also $\psi(t, z)$ zu seinem Anfangswerte zurück.

2°) rational; die n Summanden

$$\tau_\varkappa \cdot \frac{F(t, z)}{t - s_\varkappa}$$

sind algebraische Funktionen von z, werden also nur in einer endlichen Anzahl von Punkten und nur zu endlicher Ordnung ∞; als einwertige Funkton von z ist daher $\psi(t, z)$ rational in z.

Um ψ weiter ausarbeiten zu können, ziehen wir die für τ vorgeschriebenen Unstetigkeitsstellen in Betracht.

Liegt der Punkt $\varepsilon(\sigma, \zeta)$ im Blatte E_ν von T, so ist nach den Forderungen unserer Aufgabe:

$$\text{in } \varepsilon: \ \tau_\nu = \frac{1}{z - \zeta} + \text{functio cont.},$$

$$\text{und} \quad \tau_1, \ldots \tau_{\nu-1}, \ \tau_{\nu+1} \ldots \tau_n \ \text{stetig.}$$

Es ist daher:

$$\psi(t, z) = \tau_\nu \cdot \frac{F(t, z)}{t - s_\nu} + \text{functio cont.}$$

und

$$\lim (z - \zeta) \cdot \psi(t, z) = \lim (z - \zeta) \cdot \tau_\nu \cdot \frac{F(t, z)}{t - s_\nu} = \frac{F(t, \zeta)}{t - \sigma}.$$

$\psi(t, z)$ wird somit gleich ∞^1 im Punkte $\varepsilon(\sigma, \zeta)$ und es ist:

$$\text{II}^0) \qquad \psi(t, z) = \frac{F(t, \zeta)}{t - \sigma} \cdot \frac{1}{z - \zeta} + \psi_1(t, z).$$

Bedenkt man, dafs für alle endlichen Werte $z = \alpha \neq \zeta$ überall $\lim(z - \alpha)\tau = 0$ sein mufs, so folgt: ψ_1 ist im Endlichen überall stetig und daher, da es ebenso wie ψ einwertig ist, eine ganze Funktion von z.

Die weitere Untersuchung von $\psi(t, z)$ wirft sich jetzt auf $\psi_1(t, z)$ und stützt sich auf das Verhalten von ψ_1 im Unendlichen.

Für $z = \infty$ ist gefordert:

$$\tau_\varkappa = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{z} + \frac{\gamma_\varkappa}{z^2} + \frac{\gamma'_\varkappa}{z^3} + \dots \qquad (\varkappa = 1 \dots n)$$

Im Unendlichen wird also:

$$\tau_\varkappa = 0^1.$$

Berücksichtigt man daher, dafs aufserdem für $z = \infty$:

$$\frac{F(t, z)}{t - s_\varkappa} = \infty^m$$

ist, so folgt, dafs im Unendlichen $\psi(t, z) = \infty^{m-1}$ und also auch $\psi_1(t, z) = \infty^{m-1}$ wird.

Fassen wir die bisher ermittelten Eigenschaften von $\psi_1(t, z)$ zusammen, so können wir sagen:

III⁰) ψ_1 ist ganze Funktion von t, vom Grade $n - 1$ und ganze Funktion von z vom Höchstgrade $m - 1$,

$$\text{d. h. } \psi_1(t, z) = \psi_1\left(\overset{n-1}{t}, \overset{m-1}{z}\right).$$

Diese Funktion ψ_1 arbeiten wir weiter aus. — Aus

$$\frac{F'(t, z)}{F(t, z)} = \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{1}{t - s_\varkappa}$$

folgt zunächst:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{F(t, z)}{t - s_\varkappa} = F'(t, z).$$

Da nun für $z = \infty$:

$$\psi(t, z) = \sum_{\varkappa=1}^{n} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{z} + \frac{\gamma_\varkappa}{z^2} + \frac{\gamma'_\varkappa}{z^3} + \dots \right) \cdot \frac{F(t, z)}{t - s_\varkappa}$$

ist, so ergiebt sich:

$$\psi(t, z) = \frac{1}{n} \cdot \frac{F'(t, z)}{z} + \sum_{\varkappa=1}^{n} \left(\frac{\gamma_\varkappa}{z^2} + \dots \right) \cdot \frac{F(t, z)}{t - s_\varkappa},$$

und hieraus nach II⁰):

$$\psi_1(t, z) = \frac{1}{n} \cdot \frac{F'(t, z)}{z} + \sum_{\varkappa=1}^{n} \left(\frac{\gamma_\varkappa}{z^2} + \dots \right) \cdot \frac{F(t, z)}{t - s_\varkappa} - \frac{F(t, \zeta)}{t - \sigma} \cdot \frac{1}{z - \zeta}.$$

Diesen Ausdruck, an dem die Eigenschaft von ψ_1, ganze Funktion von z zu sein, nicht mehr zu erkennen ist, formen wir so um, dafs wenigstens der erste Summand im Ausdrucke von ψ_1 als durch z teilbar erscheint. Entwickelt man den mit Benutzung einer verfügbaren Gröfse γ gebildeten Quotienten

$$Q = \frac{1}{n} \cdot \frac{F'(t, z) - F'(t, \gamma)}{z - \gamma},$$

in dem die Division aufgeht, teilweise nach Potenzen von z, so erhält man:

$$Q = \frac{1}{n} \cdot \frac{F'(t, z)}{z} + \frac{1}{n} \cdot F'(t, z) \cdot \left(\frac{\gamma}{z^2} + \frac{\gamma^2}{z^3} + \dots \right) - \frac{1}{n} \cdot \frac{F'(t, \gamma)}{z - \gamma},$$

oder

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{F'(t, z)}{z} = \frac{1}{n} \cdot \frac{F'(t, z) - F'(t, \gamma)}{z - \gamma}$$

$$- \frac{1}{n} \cdot \left[F'(t, z) \cdot \left(\frac{\gamma}{z^2} + \frac{\gamma^2}{z^3} + \dots \right) - \frac{F'(t, \gamma)}{z - \gamma} \right],$$

wo der in Klammern stehende Subtrahend rechts gleich ∞^{m-2} wird für $z = \infty$. Hieraus folgt:

$$\psi_1(t, z) = \frac{1}{n} \cdot \frac{F'(t, z) - F'(t, \gamma)}{z - \gamma} + \psi_2 \left(\overset{n-1}{t}, \overset{m-2}{z} \right),$$

wo ψ_2 eine ganze Funktion von t und z ist, von den Höchstgraden $n-1$ und $m-2$:

$$\psi_2 = Ut^{n-1} + U_1 t^{n-2} + \dots + U_{n-1}.$$

Durch geeignete Verfügung über die willkürliche Gröfse γ läfst sich der Grad von ψ_2 in t noch weiter erniedrigen. Aus den Formeln a^0.) und II^0.) ergiebt sich nämlich:

$$Vt^{n-1} + V_1 t^{n-2} + \dots + V_{n-1}$$

$$= \frac{\varphi_0(\zeta) \, . \, t^n + \varphi_1(\zeta) \, t^{n-2} + \dots}{t-\sigma} \cdot \frac{1}{z-\zeta}$$

$$+ \frac{1}{n} \cdot \frac{n \, . \, \varphi_0(z) t^{n-1} + \dots - n \, . \, \varphi_0(\gamma) \, . \, t^{n-1} - \dots}{z-\gamma}$$

$$+ Ut^{n-1} + U_1 t^{n-2} + \dots + U_{n-1},$$

und hieraus mit Berücksichtigung von b^0.)

$$U = \frac{\varphi_0(z) - \varphi_0(\zeta)}{z-\zeta} - \frac{\varphi_0(z) - \varphi_0(\zeta)}{z-\gamma}.$$

Nimmt man daher $\gamma = \zeta$, so wird $U = 0$, und man erhält für $\psi(t, z)$ den Ausdruck:

$$\text{IV}^0.)\quad \psi(t, z) = \frac{F(t, \zeta)}{t-\sigma} \cdot \frac{1}{z-\zeta} + \frac{1}{n} \cdot \frac{F'(t, z) - F'(t, \zeta)}{z-\zeta}$$

$$+ \psi_2\begin{pmatrix} n-2 & m-2 \\ t & , z \end{pmatrix},$$

oder, mit Einführung der Abkürzung:

$$\text{c}^0.)\quad \frac{F(t, \zeta)}{(t-\sigma)(z-\zeta)} + \frac{1}{n} \cdot \frac{F'(t, z) - F'(t, \zeta)}{z-\zeta} = T(t, z),$$

$$\text{IV}^0_{\text{a}})\qquad \psi(t, z) = T(t, z) + \psi_2\begin{pmatrix} n-2 & m-2 \\ t & , z \end{pmatrix}.$$

Läfst man hierin $t = s_\mu$ $(\mu = 1, 2 \dots n)$ werden, so ergiebt sich wegen A^0.) das Gleichungssystem:

$$\tau_\mu \, . \, F'(s_\mu, z) = T(s_\mu, z) + \psi_2\begin{pmatrix} n-2 & m-2 \\ s_\mu & , z \end{pmatrix}, \qquad (\mu - 1, 2 \dots n)$$

das äquivalent ist mit der einen Gleichung:

B^{0}) $$\tau \,.\, F'(s, z) = T(s, z) + \psi_2\left(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z}\right).$$

Die $(m-1)(n-1) - p + r$ konstanten Koeffizienten der Funktion ψ_2 auf der rechten Seite dieser Gleichung sind nicht willkürlich. Geht man nämlich auf den ursprünglichen Ausdruck I^{0}) von $\psi(t, z)$ zurück, so erkennt man auf demselben Wege, auf dem wir früher diese Eigenschaft für den Zähler $\varphi\left(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z}\right)$ des Integranden I. Gattung bewiesen haben, daſs $\psi(s, z)$ in den r Doppelpunkten $s = \gamma_\varrho$, $z = \delta_\varrho$ $(\varrho = 1 \ldots r)$ von s gleich $0'$ werden muſs. Die konstanten Koeffizienten von ψ_2 müssen daher so bestimmt werden, daſs die r Gleichungen:

d^{0}) $$T(\gamma_\varrho, \delta_\varrho) + \psi_2\left(\overset{n-2}{\gamma_\varrho}, \overset{m-2}{\delta_\varrho}\right) = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots r)$$

erfüllt sind, und die eingangs dieses Paragraphen gestellte Aufgabe besitzt nur dann eine Lösung, wenn die $p + r$ Koeffizienten von ψ_2 sich gemäſs den Gleichungen d^{0}) bestimmen lassen. Ist diese Koeffizientenbestimmung möglich und auch ausgeführt, so ist nach B^{0}) die gesuchte Funktion τ notwendig von der Form:

C^{0}) $$\tau = \frac{T(s, z) + \psi_2\left(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z}\right)}{F'(s, z)}.$$

Nimmt man umgekehrt, die Koeffizientenbestimmung in ψ_2 vorausgesetzt, für τ einen Ausdruck von dieser Form, so sind, wie sich unschwer nachweisen läſst, die Bedingungen unserer Aufgabe erfüllt.

Die Frage nach der Existenz einer Funktion τ der Klasse von den früher geforderten Eigenschaften ist somit zurückgeführt auf die Frage: ist es möglich, die Koeffizienten von ψ_2 so zu bestimmen, daſs die r Gleichungen d^{0}) erfüllt sind?

Schreibt man die Gleichungen d^{0}) in der Form:

d_1^{0}) $$\psi_2(\gamma_\varrho, \delta_\varrho) = T_\varrho, \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots r)$$

wo T_ϱ den Wert von $T(s, z)$ im Doppelpunkte $(\gamma_\varrho, \delta_\varrho)$ bezeichnet, so sieht man unmittelbar folgendes:

1⁰) die linken Seiten dieser Gleichungen sind lineare, homogene Formen der $p+r$ Koeffizienten von ψ_2;

2⁰) die rechten Seiten sind vollständig bestimmt durch die Doppelpunkte $(\gamma_\varrho, \delta_\varrho)$ und die Lage des Unstetigkeitspunktes $\varepsilon(\sigma, \zeta)$ und unabhängig von den Koeffizienten von ψ_2;

3⁰) Die Gleichungen $d_{1.}^{0})$ stimmen bis auf die rechts stehenden unabhängigen Glieder T_ϱ vollständig überein mit den Gleichungen $\mathrm{II}_{b.}^{0})$, § 19.

Nach Satz IV⁰), § 19 erhält aber das Gleichungssystem $\mathrm{II}_{b.}^{0})$ unter keinen Umständen überzählige Gleichungen, weder für $p > 0$ noch für $p = 0$. Dasselbe gilt also auch vom Gleichungssystem $d_{1.}^{0})$. Ist dies aber der Fall, so schliefsen die Gleichungen $d_{1.}^{0})$ auch keinen Widerspruch in sich ein, namentlich erlauben sie, die $p+r$ Koeffizienten von ψ_2 zu bestimmen, ohne dafs sich dabei eine Beziehung zwischen den in den unabhängigen Gliedern T_ϱ vorkommenden Koordinaten σ und ζ des Punktes ε ergiebt. Die Gleichungen $d_{1.}^{0})$ beeinträchtigen also in keiner Weise die freie Wählbarkeit des Punktes ε.

Die Funktion τ der Klasse mit den Eingangs dieses Paragraphen geforderten Eigenschaften existiert also auf jeden Fall, welches auch das Geschlecht p sei, und als Unstetigkeitspunkt ε können wir jeden im Endlichen gelegenen Punkt von T nehmen.

Schreibt man nun ψ_2 in der Form:

$$\psi_2 = \sum_{\nu=0}^{n-2} \sum_{\mu=0}^{m-2} \Gamma_{\mu\nu}\, s^\nu z^\mu = \sum_{\varkappa=1}^{p+r} \Gamma_\varkappa \cdot \Phi_\varkappa(s, z),$$

wo $\Phi_\varkappa(s, z) = s^\nu z^\mu$ ist, so bestimmen die Gleichungen $d_{1.}^{0})$ r von diesen Koeffizienten $\Gamma_\varkappa$ durch die übrigen p, etwa

$$\Gamma_{p+1}, \ldots \Gamma_\beta, \ldots \Gamma_{p+r}$$

durch

$$\Gamma_1, \ldots \Gamma_\alpha, \ldots \Gamma_p$$

und es ist allgemein:

$$\mathrm{e}^{0}) \quad \Gamma_\beta = \sum_{\alpha=1}^{p} \Gamma_\alpha \cdot q_{\alpha\beta} - \sum_{\varrho=1}^{r} T_\varrho \cdot \varDelta_{\varrho\beta}, \qquad (\beta = p+1, \ldots p+r)$$

wo die q_β konstant und die $J_{\varrho\beta}$ Determinantenquotienten sind, die nur von der Lage der Doppelpunkte abhängen, also ebenfalls konstant sind.

Aus e$_2^0$) folgt:

$$\psi_2(s, z) = \sum_{\alpha=1}^{p} \Gamma_\alpha \cdot \Phi_\alpha + \sum_{\beta=p+1}^{p+r} \Phi_\beta \left[\sum_{\alpha=1}^{p} \Gamma_\alpha \cdot q_{\alpha\beta} - \sum_{\varrho=1}^{r} T_\varrho \cdot J_{\varrho\beta} \right]$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{p} \Gamma_\alpha \cdot [\Phi_\alpha + \sum_\beta q_{\alpha\beta} \cdot \Phi_\beta] - \sum_{\varrho=1}^{r} T_\varrho \sum_\beta J_{\varrho\beta} \cdot \Phi_\beta.$$

Hätte das System d$_1^0$) keine unabhängigen Glieder T_ϱ gehabt, d. h. hätten wir es mit den Gleichungen II$_b^0$), § 19, zu thun, so hätte die rechte Seite der vorigen Gleichung sich reduziert auf

$$\sum_\alpha \Gamma_\alpha [\Phi_\alpha + \sum_\beta q_{\alpha\beta} \Phi_\beta];$$

die p Klammerausdrücke $\Phi_\alpha + \sum\limits_\beta q_{\alpha\beta} \Phi_\beta$ sind also nichts anderes als die Zähler $\varphi_1 \ldots \varphi_p$ der p Fundamentalintegranden I. Gattung: Wir haben daher:

$$\psi_2 = \sum_{\alpha=1}^{p} \Gamma_\alpha \cdot \varphi_\alpha - \sum_{\varrho=1}^{r} T_\varrho \cdot \sum_\beta J_{\varrho\beta} \cdot \Phi_\beta,$$

oder

$$\psi_2 = \sum \Gamma_\alpha \cdot \varphi_\alpha - \sum_{\varrho=1}^{r} T_\varrho \cdot \Psi_\varrho,$$

wo die $\Psi_\varrho = \sum\limits_\varrho J_{\varrho\beta} \cdot \Phi_\beta$ ganze Funktionen von s und z sind, die in diesen Variabelen bis zu den Graden $n - 2$ und $m - 2$ ansteigen können.

Aus B$_2^0$) ergiebt sich nun:

$$\tau \cdot F'(s, z) = T - \sum_{\varrho=1}^{r} T_\varrho \cdot \Psi_\varrho + \sum_{\alpha=1}^{p} \Gamma_\alpha \cdot \varphi_\alpha,$$

oder, mit Einführung der Abkürzung:

f$_2^0$) $$\Phi(o, \varepsilon) = T - \sum_{\varrho=1}^{r} T_\varrho \cdot \Psi_\varrho(s, z).$$

D$_2^0$) $$\tau = \frac{\boldsymbol{\Phi(o, \varepsilon)}}{\boldsymbol{F'(s, z)}} + \sum_{\alpha=1}^{p} \Gamma_\alpha \cdot w'_\alpha.$$

Das Zeichen (o, ε) soll dabei andeuten, dafs Φ eine Funktion der Koordinaten s, z des variabeln Punktes o und der Koordinaten σ, ζ des fest angenommenen Punktes ε ist.

Formel D°) enthält die Lösung der zu Anfang dieses Paragraphen gestellten Aufgabe. Das Integral der in D°) aufgestellten Funktion τ der Klasse ist:

$$J = \int \frac{\Phi(o, \varepsilon)}{F'(s, z)} dz + \sum_{\alpha=1}^{p} \Gamma_\alpha \cdot w_\alpha + \text{constans},$$

wo $w_1 \dots w_p$ p linearunabhängige Fundamentalintegrale I. Gattung sind. Da das allgemeine Integral $\sum_\alpha \Gamma_\alpha \cdot w_\alpha + \text{const.}$ zu den logarithmischen Unstetigkeiten von J keinen Beitrag liefert, können wir es auch weglassen und erhalten so die zwei Formeln:

E°)
$$\begin{cases} \tau = \dfrac{\Phi(o, \varepsilon)}{F'(s, z)}, \\[2ex] J(o, \varepsilon) = \displaystyle\int \frac{\Phi(o, \varepsilon)}{F'(s, z)} dz. \end{cases}$$

Dieses Integral der Klasse besitzt folgende Eigenschaften:

1°) Es ist in T überall stetig, mit Ausnahme des Punktes $\varepsilon(\sigma, \zeta)$ und der ∞-fernen Punkte von T, und zwar ist:

$$\text{in } \varepsilon: \quad J(o, \varepsilon) = \log(z - \zeta) + \text{functio const.}$$

$$\text{in } \infty_\varkappa: \quad J(o, \varepsilon) = \frac{1}{n} \cdot \log z + f.c. \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots n)$$

2°) Es ist eindeutig weder in T noch in T', sondern erst in der einfach zusammenhängenden Fläche T'', die man erhält, wenn man in T' noch einen Punktschnitt anlegt, der vom gemeinsamen Ausgangspunkte der Schnitte $c_1 \dots c_p$ ausgeht und Strahlen $l, l_1 \dots l_n$ nach ε und $\infty_1 \dots \infty_n$ aussendet.

3°) In dieser Fläche T'' besitzt $J(o, \varepsilon)$ konstante Periodizitätsmoduln an $a_1 \dots a_p$, $b_1 \dots b_p$, $l, l_1 \dots l_n$, und zwar ist:

an	a_λ,	b_λ,	l,	$(l_1 \dots l_n)$
$\overset{+}{J} - \overset{-}{J} =$	$A_\lambda(\varepsilon)$,	$B_\lambda(\varepsilon)$,	$2\pi i$,	$-\frac{2\pi i}{n}$

wo $A_\lambda(\varepsilon)$, $B_\lambda(\varepsilon)$ definiert sind durch die Integrale (siehe Fig. 34):

$$A_\lambda(\varepsilon) = \int \left| \begin{matrix} \gamma \\ b \\ \beta \end{matrix} \right|_\lambda d\, J(o, \varepsilon), \quad B_\lambda(\varepsilon) = \int \left| \begin{matrix} a \\ a \\ \beta \end{matrix} \right|_\lambda d\, J(o, \varepsilon),$$

$$(\lambda = 1, 2 \dots p).$$

Diese Periodizitätsmoduln sind nicht unabhängig von einander. Bildet man nämlich das Integral

$$\int_{(T')} w \cdot \frac{d\, J(o, \varepsilon)}{d\, z}\, d\, z,$$

worin w das allgemeine Integral I. Gattung bezeichnet, und die Integration sich in positiver Richtung über die ganze Begrenzung von T' erstreckt, so ist:

1º) $\int_{(T')} w \cdot d\, J(o, \varepsilon) = 2\pi i$ mal der Summe der Residuen von

$$w \cdot \frac{d\, J(o, \varepsilon)}{d\, z} \text{ in } T'.$$

$w \cdot \frac{d\, J(o, \varepsilon)}{d\, z}$ besitzt aber in T' Residuen nur in ε und in $\infty_1 \dots \infty_n$, und zwar ist:

$$\text{in } \varepsilon: \quad \text{Res}(\varepsilon) = \left| w \cdot \frac{d\, J}{d\, z} \right|_{\frac{1}{z-\zeta}} = w(\varepsilon),$$

$$\text{in } \infty_\varkappa: \quad \text{Res}(\infty_\varkappa) = -\left| w \cdot \frac{d\, J}{d\, z} \right|_{\frac{1}{z}} = -\frac{1}{n} \cdot w(\infty_\varkappa).$$

In allen anderen Punkten $z = \alpha$ ist

$$\lim (z - \alpha) \cdot w \cdot \frac{d\, J}{d\, z} = 0,$$

und daher das zugehörige Residuum gleich Null. — Es ist also einerseits:

$$\int\limits_{(T')} w \cdot \frac{d J(o,\varepsilon)}{dz} dz = 2\pi i \cdot [w(\varepsilon) - \frac{1}{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} w(\infty_{\varkappa})].$$

Andererseits ist:

2°) $$\int\limits_{(T')} w \cdot \frac{d J(o,\varepsilon)}{dz} dz$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{p} \left\{ \int \begin{vmatrix} \alpha \\ a \\ \beta \end{vmatrix}_{\lambda} \left(\overset{+}{w} \cdot d\overset{+}{J} - \overset{-}{w} \cdot d\overset{-}{J}\right) + \int \begin{vmatrix} \gamma \\ b \\ \beta \end{vmatrix}_{\lambda} \left(\overset{-}{w} \cdot d\overset{-}{J} - \overset{+}{w}\, d\overset{+}{J}\right) \right\}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{p} \left\{ A_{\lambda} \cdot \int \begin{vmatrix} \alpha \\ a \\ \beta \end{vmatrix}_{\lambda} dJ - B_{\lambda} \cdot \int \begin{vmatrix} \gamma \\ b \\ \beta \end{vmatrix}_{\lambda} dJ \right\}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{p} \left(A_{\lambda} \cdot B_{\lambda}(\varepsilon) - B_{\lambda} \cdot A_{\lambda}(\varepsilon)\right).$$

Wir haben so die Beziehung:

F°) $$\sum_{\lambda=1}^{p} (A_{\lambda} . B_{\lambda}(\varepsilon) - B_{\lambda} . A_{\lambda}(\varepsilon)) = 2\pi i . [w(\varepsilon) - \frac{1}{n} . \sum_{\varkappa=1}^{n} w(\infty_{\varkappa})],$$

worin w ein allgemeines Integral I. Gattung bezeichnet, mit den Periodizitätsmoduln A_{λ}, B_{λ} an a_{λ}, b_{λ}.

Die Beziehung F°) vereinfacht sich, wenn man an Stelle des allgemeinen Integrals I. Gattung w ein definitiv normiertes Integral I. Gattung u_{μ} nimmt. Es ist dann:

$$A_{\lambda} = \binom{\lambda}{\mu} \pi i, \quad B_{\lambda} = a_{\mu\lambda}, \quad \frac{1}{n} . \sum_{\varkappa=1}^{n} u_{\mu}(\infty_{\varkappa}) = 0,$$

und daher:

$$\sum_{\lambda=1}^{p} (A_{\lambda} . B_{\lambda}(\varepsilon) - B_{\lambda} . A_{\lambda}(\varepsilon)) = \pi i . B_{\mu}(\varepsilon) - \sum_{\lambda=1}^{p} a_{\mu\lambda} . A_{\lambda}(\varepsilon).$$

Dies giebt den

Satz I°) Zwischen den Periodizitätsmoduln $A_\lambda(\varepsilon)$, $B_\lambda(\varepsilon)$ $(\lambda = 1, 2 \ldots p)$ des Integrals $J(o, \varepsilon)$ der Klasse bestehen die p Beziehungen:

$$\text{G°)} \quad B_\mu(\varepsilon) - \frac{1}{\pi i} \cdot \sum_{\lambda=1}^{p} a_{\mu\lambda} A_\lambda(\varepsilon) = 2 \cdot u_\mu(\varepsilon), \quad (\mu = 1, 2 \ldots p)$$

worin u_μ ein definitiv normiertes Integral I. Gattung ist.

Diese Beziehungen G°) geben Anlafs zur Bildung einer für das Folgende grundlegenden Integralfunktion mit denselben Unstetigkeiten wie $J(o, \varepsilon)$, aber einfacheren Periodizitätseigenschaften. Bildet man nämlich das Integral

$$\text{H°)} \quad P(o, \varepsilon) = J(o, \varepsilon) - \frac{1}{\pi i} \cdot \sum_{\lambda=1}^{p} A_\lambda(\varepsilon) \cdot u_\lambda(o),$$

so gilt, wie unmittelbar ersichtlich, der

Satz II°) Das Integral $P(o, \varepsilon)$ besitzt folgende Eigenschaften:

1°) in ε ist: $P(o, \varepsilon) = \log(z - \zeta) + \text{f. c.}$,

2°) in $\infty_\varkappa$ ist: $P(o, \varepsilon) = \frac{1}{n} \log z + \text{f. c.}$,

3°) $P(o, \varepsilon)$ ist in T'' überall eindeutig und stetig,

4°) $P(o, \varepsilon)$ hat in T'' die Periodizitätsmoduln:

an	a_λ,	b_λ,	l,	$(l_1 \ldots l_n)$
$\overset{+}{P} - \overset{-}{P} =$	0,	$2u_\lambda(\varepsilon)$,	$2\pi i$,	$-\frac{2\pi i}{n}$

Mit Hilfe dieses von Christoffel in die Theorie der Abel'schen Funktionen eingeführten Integrals $P(o, \varepsilon)$ der Klasse lassen sich mit Leichtigkeit die Normalintegrale II. und III. Gattung herstellen.

§ 23. Das Normalintegral II. Gattung.

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, dafs der Unstetigkeitspunkt $\varepsilon(\sigma, \zeta)$ der Funktion τ, der zugleich ein logarithmischer Unstetigkeitspunkt des Integrals $P(o, \varepsilon)$ ist, beliebig im Innern der Fläche T angenommen werden kann. Wir können daher das Integral $P(o, \varepsilon)$ auch als Funktion der unbeschränkt veränderlichen Gröfse ζ ansehen und es nach dieser Variabelen ζ differentiieren. Bildet man nun den Differentialquotienten:

$$-\frac{dP(o, \varepsilon)}{d\zeta},$$

so ist:

$$\text{in } \varepsilon: \quad -\frac{dP(o, \varepsilon)}{d\zeta} = \frac{1}{z-\zeta} + \text{functio cont.},$$

$$\text{in } \infty_\varkappa: \quad -\frac{dP(o, \varepsilon)}{d\zeta} = \text{f. c.}$$

Die Funktion

$$1^{\circ}) \qquad t(o, \varepsilon) = -\frac{dP(o, \varepsilon)}{d\zeta} + \text{const.},$$

die sonach in T keine logarithmische Unstetigkeit besitzt und nur an der einen Stelle $\varepsilon(\sigma, \zeta)$ algebraisch unstetig wird zur Ordnung 1, heifst das Normalintegral II. Gattung mit dem algebraischen Unstetigkeitspunkt 1. Ordnung $\varepsilon(\sigma, \zeta)$. Für dieses Integral gelten folgende Sätze.

Satz I°) Das Normalintegral II. Gattung $t(o, \varepsilon)$ ist charakterisiert durch folgende Eigenschaften:

1°) $t(o, \varepsilon)$ ist in T' eindeutig;

2°) es wird in T' nur einmal algebraisch unstetig, nämlich im Punkte $\varepsilon(\sigma, \zeta)$ und dort ist:

$$t(o, \varepsilon) = \frac{1}{z-\zeta} + \text{f. c.};$$

3°) seine Periodizitätsmoduln sind:

an	a_λ,	b_λ,
$\overset{+}{t} - \overset{-}{t} =$	0,	$-2u'_\lambda(\varepsilon)$.

Da $u'_\varkappa$ eine Funktion der Klasse ist, so sind die Periodizitätsmoduln von $t(o,\varepsilon)$ an den Querschnitten $b_\varkappa$ algebraische Funktionen der Unstetigkeitstelle ε.

Satz II°) Das Normalintegral II. Gattung $t(o,\varepsilon)$ ist durch Angabe seines Unstetigkeitspunktes bis auf eine additive Konstante vollständig bestimmt.

Beweis: Sind t_1 und t_2 zwei Normalintegrale II. Gattung mit derselben Unstetigkeitsstelle, so ist die Differenz $t_1 - t_2$ ein Integral der Klasse, das in T' überall eindeutig und stetig ist, also ein Integral I. Gattung; da dieses Integral aufserdem an den Querschnitten a_λ, b_λ ($\lambda = 1 \ldots p$) lauter verschwindende Periodizitätsmoduln hat, so reduziert es sich auf eine Konstante. w. z. b. w.

Verfügen wir über diese in $t(o,\varepsilon)$ enthaltene additive Konstante so, dafs

$$2°)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} t(\infty_\varkappa, \varepsilon) = 0$$

ist, so möge $t(o,\varepsilon)$ das definitiv normierte Integral II. Gattung mit dem algebraischen Unstetigkeitspunkte 1. Ordnung $\varepsilon(\sigma,\zeta)$ heissen.

Für dieses definitiv normierte Integral II. Gattung läfst sich ein bemerkenswerter Ausdruck ableiten.*)

Bildet man das Integral

$$3°)\qquad \int\limits_{(T')} t(o,\varepsilon) \cdot \frac{dP(o,E)}{dz}\, dz,$$

worin der Punkt $E(S,Z)$ ebenso unbeschränkt variabel sei, wie der Punkt $\varepsilon(\sigma,\zeta)$, so ist:

$$1°)\qquad \int\limits_{(T')} t(o,\varepsilon) \cdot \frac{dP(o,E)}{dz}\, dz$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{p} \left\{ \int \left|{}^{\alpha}_{a}{}_{\beta}\right|_\lambda \left(\overset{+}{t} - \overset{-}{t}\right) dP - \int \left|{}^{\gamma}_{b}{}_{\beta}\right|_\lambda \left(\overset{+}{t} - \overset{-}{t}\right) dP \right\} = 0,$$

*) Nach einer Vorlesung von Christoffel.

wie sich unmittelbar aus den Periodizitätseigenschaften von $t(o, \varepsilon)$ und $P(o, \varepsilon)$ ergiebt.

Andererseits ist:

2°) $\int\limits_{(T')} t(o, \varepsilon) \cdot \frac{d\,P(o, E)}{d\,z}\,dz = 2\pi i$ mal der Summe der

Residuen von $t(o, \varepsilon) \cdot \frac{d\,P(o, E)}{d\,z}$ in T'.

Diese Funktion besitzt Residuen:

α°) in $\varepsilon(\sigma, \zeta)$: dort ist:

$$t(o, \varepsilon) = \frac{1}{z - \zeta} + \text{f. c.}, \quad \lim (z - \zeta) \cdot t(o, \varepsilon) = 1$$

$$\lim \frac{d\,P(o, E)}{d\,z} = \frac{d\,P(\varepsilon, E)}{d\,z}.$$

und daher: $$\text{Res}(\varepsilon) = \frac{d\,P(\varepsilon, E)}{d\,\zeta}.$$

β°) in $E(S, Z)$: dort ist:

$$P(o, E) = \log(z - Z) + \text{f. c.},$$

$$\lim (z - Z) \cdot \frac{d\,P(o, E)}{d\,z} = 1,$$

und folglich: $$\text{Res}(E) = t(E, \varepsilon).$$

Da im Endlichen sonst überall für $z = \alpha$:

$$\lim (z - \alpha) \cdot t(o, \varepsilon) \cdot \frac{d\,P(o, E)}{d\,z} = 0 \text{ ist,}$$

so kommen für endliche z weiter keine Residuen vor.

γ°) in $\infty_\varkappa$ $(\varkappa = 1 \ldots n)$: hier ist:

$$P(o, E) = \frac{1}{n} \cdot \log z + \text{f. c.},$$

$$\frac{d\,P(o, E)}{d\,z} = \frac{1}{n\,z} + \text{f. c.},$$

und daher $$\text{Res}(\infty_\varkappa) = -\frac{1}{n} \cdot t(\infty_\varkappa, \varepsilon). \qquad (\varkappa = 1, 2 \ldots n)$$

Durch Gleichsetzen der zwei für das Integral

$$\int_{(T)} t(o, \varepsilon) \cdot \frac{d P(o, E)}{d z} d z$$

erhaltenen Werte ergiebt sich:

$$0 = \frac{d P(\varepsilon, E)}{d \zeta} + t(E, \varepsilon) - \frac{1}{n} \cdot \sum_{\varkappa=1}^{n} t(\infty_\varkappa, \varepsilon),$$

oder, wenn wir $t(o, \varepsilon)$ als definitiv normiert voraussetzen:

$$t(E, \varepsilon) = -\frac{d P(\varepsilon, E)}{d \zeta}.$$

Schreibt man hierin für den unbeschränkt variabelen Punkt $E(S, Z)$ wieder $o(s, z)$, so erhält man:

$$4^{0}) \qquad t(o, \varepsilon) = -\frac{d P(\varepsilon, o)}{d \zeta}.$$

Aus der Definitionsformel:

$$\frac{d P(o, \varepsilon)}{d z} = \frac{\Phi(o, \varepsilon)}{F'(s, z)} - \frac{1}{\pi i} \sum_{\lambda=1}^{p} A_\lambda(\varepsilon) \cdot u'_\lambda(o)$$

folgt aber:

$$\frac{d P(\varepsilon, o)}{d \zeta} = \frac{\Phi(\varepsilon, o)}{F'(\sigma, \zeta)} - \frac{1}{\pi i} \cdot \sum_{\lambda=1}^{p} A_\lambda(o) \cdot u'_\lambda(\varepsilon).$$

Setzt man dies in 4^{0}) ein, so ergiebt sich für das definitiv normierte Integral $t(o, \varepsilon)$ die Formel:

$$5^{0}) \qquad t(o, \varepsilon) = \frac{1}{\pi i} \sum_{\lambda=1}^{p} A_\lambda(o) \cdot u'_\lambda(\varepsilon) - \frac{\Phi(\varepsilon, o)}{F'(\sigma, \zeta)}.$$

Aus 1^{0}) und 4^{0}) ergiebt sich zugleich, dafs die zwei Differentialquotienten

$$\frac{d P(o, \varepsilon)}{d \zeta} \text{ und } \frac{d P(\varepsilon, o)}{d \zeta}$$

sich nur um eine Konstante unterscheiden.

Die vorigen Betrachtungen lassen sich verallgemeinern. Bildet man die Funktion

$$6^{0})\qquad t^{(\nu)}(o,\varepsilon) = -\frac{d^{\nu}P(o,\varepsilon)}{d\zeta^{\nu}} + \text{const.},$$

so ist dieselbe in T' überall eindeutig und wird unstetig nur im Punkte $\varepsilon(\sigma,\zeta)$, und zwar ist dort:

$$7^{0})\qquad t^{(\nu)}(o,\varepsilon) = \frac{(\nu-1)!}{(z-\zeta)^{\nu}} + f.c.\qquad (\nu > 1).$$

Das Integral $t^{(\nu)}(o,\varepsilon)$ hat an den Querschnitten $a_{\lambda}(\lambda = 1, 2 \ldots p)$ Periodizitätsmoduln $A_{\lambda}^{(\nu)}(\varepsilon)$, die alle $= 0$ sind; um die Periodizitätsmoduln $B_{\lambda}^{(\nu)}(\varepsilon)$ von $t^{(\nu)}(o,\varepsilon)$ an den Querschnitten b_{λ} zu bestimmen, bilden wir das Randintegral:

$$Q = \int\limits_{(T')} u_{\mu}\cdot\frac{d\,t^{(\nu)}(o,\varepsilon)}{dz}\,dz.$$

Dieses Integral ist einerseits, wie die wirkliche Auswertung zeigt, gleich $\pi i\,.\,B_{\mu}^{(\nu)}(\varepsilon)$. Andererseits ist $Q = 2\pi i$ mal der Summe der Residuen von

$$u_{\mu}\cdot\frac{d\,t^{(\nu)}(o,\varepsilon)}{dz}\ \text{in}\ T'.$$

Beachtet man, dafs der Integrand

$$u_{\mu}\cdot\frac{d\,t^{(\nu)}(o,\varepsilon)}{dz}$$

ein von Null verschiedenes Residuum nur im Punkte $\varepsilon(\sigma,\zeta)$ besitzen kann, und dafs an dieser Stelle:

$$\frac{d\,t^{(\nu)}(o,\varepsilon)}{dz} = -\frac{\nu!}{(z-\zeta)^{\nu+1}} + f.c.,$$

$$u_{\mu} = u_{\mu}(\varepsilon) + (z-\zeta)\,.\,u_{\mu}'(\varepsilon)$$

$$+\frac{(z-\zeta)^{2}}{2!}u_{\mu}''(\varepsilon) + \ldots + \frac{(z-\zeta)^{\nu}}{\nu!}u_{\mu}^{(\nu)}(\varepsilon) + \ldots$$

ist, wo allgemein $u_{\mu}^{(\nu)}$ die ν^{te} Derivierte von u_{μ} nach z bedeutet, so sieht man, dafs das Residuum im Punkte $\varepsilon(\sigma,\zeta)$

gleich $-u_\mu^{(\nu)}(\varepsilon)$ ist. Durch Gleichsetzung der zwei für Q erhaltenen Werte ergiebt sich:

$$\pi i \, . \, B_\mu^{(\nu)}(\varepsilon) = -2\pi i \, . \, u_\mu^{(\nu)}(\varepsilon),$$

oder

$$8^0) \qquad B_\mu^{(\nu)}(\varepsilon) = -2 \, . \, u_\mu^{(\nu)}(\varepsilon).$$

Das Integral $t^{(\nu)}(o, \varepsilon)$ nennen wir das Normalintegral II. Gattung mit dem Unstetigkeitspunkt ν^{ter} Ordnung $\varepsilon\,(\sigma, \zeta)$.

Für $t^{(\nu)}(o, \varepsilon)$ gilt, wie für $t(o, \varepsilon)$ der Satz, dafs es durch Angabe seines Unstetigkeitspunktes bis auf eine additive Konstante völlig bestimmt ist. Verfügt man über diese Konstante so, dafs

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} t^{(\nu)}(\infty_\varkappa, \varepsilon) = 0$$

ist, so erhält man das definitiv normierte Integral II. Gattung mit dem Unstetigkeitpunkt ν^{ter} Ordnung $\varepsilon\,(\sigma, \zeta)$.

Für dieses Integral läfst sich eine Darstellungsform angeben, die analog ist dem in 5^0) für das definitiv normierte Integral $t(o, \varepsilon)$ gegebenen Ausdruck. Bildet man nämlich das Randintegral:

$$\int_{(T')} t^{(\nu)}(o, \varepsilon) \, . \, \frac{d\,P(o, E)}{d\,z}\, dz$$

und berücksichtigt man, dafs dieses Integral einerseits $= 0$, andererseits aber auch gleich $2\pi i$ mal der Summe der Residuen von

$$t^{(\nu)}(o, \varepsilon) \, . \, \frac{d\,P(o, E)}{d\,z} \text{ in } T'$$

ist, so erhält man, wie eine leichte Rechnung zeigt, für das definitiv normierte Integral $t^{(\nu)}(o, \varepsilon)$ die Darstellungsformel:

$$9^0) \quad t^{(\nu)}(o, \varepsilon) = \frac{1}{\pi i} \cdot \sum_{\lambda=1}^{p} A_\lambda(o) \, . \, u_\lambda^{(\nu)}(\varepsilon) - \frac{d^{\nu-1}}{d\,\zeta^{\nu-1}} \left(\frac{\Phi(\varepsilon, o)}{F'(\sigma, \zeta)} \right).$$

Die Ableitung dieser Formel liefert zugleich das Resultat, dafs die zwei Derivierten ν^{ter} Ordnung:

$$\frac{d^\nu P(o,\varepsilon)}{d\zeta^\nu} \text{ und } \frac{d^\nu P(\varepsilon,o)}{d\zeta^\nu}$$

sich nur um eine additive Konstante unterscheiden.

---

§ 24. Das Normalintegral III. Gattung.

Bezeichnen $P(o,\varepsilon_1)$ und $P(o,\varepsilon_2)$ zwei Integralfunktionen mit den Unstetigkeitsstellen

$$\varepsilon_1(\sigma_1,\zeta_1):\; P(o,\varepsilon_1) = \log(z-\zeta_1) + \text{f. c.},$$

resp.

$$\varepsilon_2(\sigma_2,\zeta_2):\; P(o,\varepsilon_2) = \log(z-\zeta_2) + \text{f. c.},$$

so heifst die Differenz:

1°) $$\tilde{\omega}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = P(o,\varepsilon_1) - P(o,\varepsilon_2)$$

ein Normalintegral III. Gattung. Für dieses Integral gelten folgende Sätze:

Satz I°) 1°) $\tilde{\omega}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ ist ein Integral der Klasse;

2°) $\tilde{\omega}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ bleibt im Unendlichen stetig und besitzt im Endlichen nur die zwei Unstetigkeitspunkte ε_1 und ε_2, und zwar ist:

$$\text{in } \varepsilon_1:\; \tilde{\omega}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \log(z-\zeta_1) + \text{f. c.},$$
$$\text{in } \varepsilon_2:\; \tilde{\omega}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = -\log(z-\zeta_2) + \text{f. c.};$$

3°) $\tilde{\omega}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ ist eindeutig in der einfach zusammenhängenden Fläche T'', die man erhält, wenn man in T' von dem gemeinsamen Kreuzungspunkte aller Schnitte c_λ aus nach ε_1 und ε_2 zwei Punktschnitte l_1 und l_2 anlegt, die weder sich selbst noch die übrigen Schnitte von T' kreuzen;

4°) die Periodizitätsmodulen von $\tilde{\omega}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ sind:

an	a_λ	b_λ	l_1	l_2
$\overset{+}{\tilde{\omega}} - \overset{-}{\tilde{\omega}} =$	0	$2[u_\lambda(\varepsilon_1) - u_\lambda(\varepsilon_2)]$	$2\pi i$	$-2\pi i$

Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus der Definitionsgleichung 1°) von $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ und aus den Eigenschaften der Integralfunktion $P(o, \varepsilon)$.

Satz II°) $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ist durch seine logarithmischen Unstetigkeitspunkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ bis auf eine additive Konstante völlig bestimmt.

Beweis: Bezeichnen $\tilde{\omega}_1$ und $\tilde{\omega}_2$ zwei Normalintegrale III. Gattung mit denselben Unstetigkeitspunkten ε_1 und ε_2, so ist die Differenz $\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}$ in T' allenthalben endlich, also ein Integral I. Gattung; da dieses Integral ferner an $a_1 \ldots a_p$ lauter verschwindende Periodizitätsmoduln hat, so ist es eine Konstante, w. z. b. w.

Satz III°) Es ist: $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = - \tilde{\omega}(\varepsilon_2, \varepsilon_1)$.

Der Beweis folgt ohne weiteres aus der Definitionsgleichung 1°).

Satz IV°) Jedes Normalintegral III. Gattung läfst sich darstellen als Differenz zweier Normalintegrale III. Gattung mit einem gemeinsamen logarithmischen Unstetigkeitspunkte und denselben Grenzen, wie das ursprüngliche Integral.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= P(o, \varepsilon_1) - P(o, \varepsilon_2) \\ &= [P(o, \varepsilon_1) - P(o, \varepsilon_3)] - [P(o, \varepsilon_2) - P(o, \varepsilon_3)] \\ &= \tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) - \tilde{\omega}(\varepsilon_2, \varepsilon_3).\end{aligned}$$

Satz V°) Die Summe von drei Normalintegralen III. Gattung $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $\tilde{\omega}(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ und $\tilde{\omega}(\varepsilon_3, \varepsilon_1)$ mit denselben unteren und oberen Grenzen ist gleich Null.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}&\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \tilde{\omega}(\varepsilon_2, \varepsilon_3) + \tilde{\omega}(\varepsilon_3, \varepsilon_1) \\ &= P(o, \varepsilon_1) - P(o, \varepsilon_2) + P(o, \varepsilon_2) - P(o, \varepsilon_3) \\ &\quad + P(o, \varepsilon_3) - P(o, \varepsilon_1) = 0.\end{aligned}$$

Ein weiterer wichtiger Satz über Normalintegrale III. Gattung läfst sich folgenderweise ableiten.

Wir bilden das Randintegral:

$$U = \int_{(T'')} \tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \cdot \frac{d\,\tilde{\omega}(\varepsilon_3, \varepsilon_4)}{dz} \cdot dz, \tag{29}$$

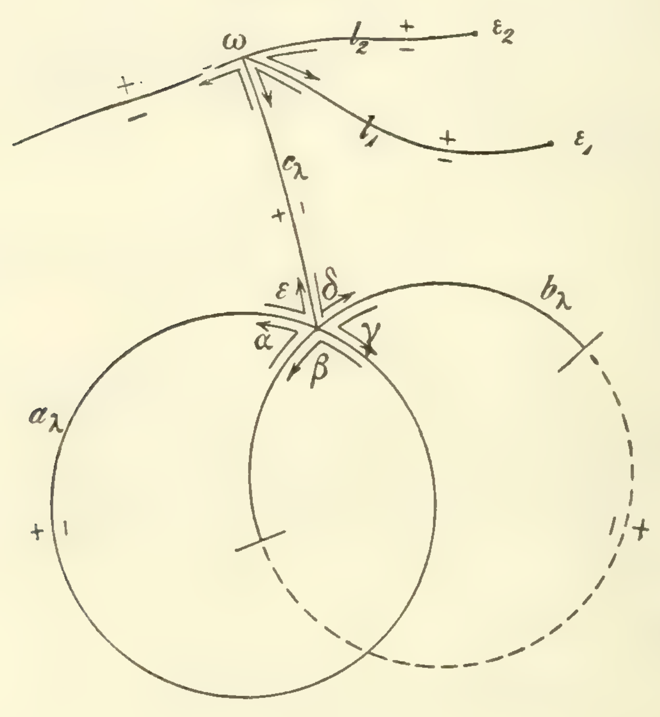


Fig. 35.

wo $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $\tilde{\omega}(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$ zwei Normalintegrale mit den angeschriebenen logarithmischen Unstetigkeitspunkten sind, und die Integration sich in positiver Richtung über die vollständige Begrenzung der Fläche T'' erstreckt, in welcher $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ eindeutig ist (siehe Figur 35). In dieser Fläche T'' ist der Integrand

$$U' = \tilde{\omega}_{12} \cdot \frac{d\,\tilde{\omega}_{34}}{dz},$$

$(\tilde{\omega}_{12} = \tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2),\ \ \tilde{\omega}_{34} = \tilde{\omega}(\varepsilon_3, \varepsilon_4))$ eindeutig, logarithmisch unstetig in ε_1 und ε_2, algebraisch unstetig in ε_3 und ε_4 und

sonst überall stetig. Residuen besitzt U' also nur in ε_3 und ε_4, und zwar ist:

$$\text{in } \varepsilon_3: \frac{d\tilde{\omega}_{34}}{dz} = \frac{1}{z - z_3} + \text{f. c.}, \quad \text{Res}(\varepsilon_3) = \tilde{\omega}_{12}(\varepsilon_3);$$

$$\text{in } \varepsilon_4: \frac{d\tilde{\omega}_{34}}{dz} = -\frac{1}{z - z_4} + \text{f. c.}, \quad \text{Res}(\varepsilon_4) = -\tilde{\omega}_{12}(\varepsilon_4).$$

Die Summe der Residuen von U' in T'' ist daher gleich

$$3^{0}) \qquad \tilde{\omega}_{12}(\varepsilon_3) - \tilde{\omega}_{12}(\varepsilon_4) = \frac{1}{2\pi i} \cdot U.$$

Durch wirkliche Ausführung der Integration erhält man andererseits:

$$U = \sum_{\lambda=1}^{p} \left[\int \begin{vmatrix} \alpha \\ a \\ \beta \end{vmatrix}_{\lambda} \left(\overset{+}{\tilde{\omega}}_{12}\, d\overset{+}{\tilde{\omega}}_{34} - \overset{-}{\tilde{\omega}}_{12} \cdot d\overset{-}{\tilde{\omega}}_{34} \right) + \int \begin{vmatrix} \gamma \\ b \\ \beta \end{vmatrix}_{\lambda} \left(\overset{-}{\tilde{\omega}}_{12} \cdot d\overset{-}{\tilde{\omega}}_{34} - \overset{+}{\tilde{\omega}}_{12} \cdot d\overset{+}{\tilde{\omega}}_{34} \right) \right]$$

$$+ \int \begin{vmatrix} \omega \\ l_1 \\ \varepsilon_1 \end{vmatrix} \left(\overset{-}{\tilde{\omega}}_{12}\, d\overset{-}{\tilde{\omega}}_{34} - \overset{+}{\tilde{\omega}}_{12}\, d\overset{+}{\tilde{\omega}}_{34} \right)$$

$$+ \int \begin{vmatrix} \varepsilon_2 \\ l_2 \\ \omega \end{vmatrix} \left(\overset{+}{\tilde{\omega}}_{12}\, d\overset{+}{\tilde{\omega}}_{34} - \overset{-}{\tilde{\omega}}_{12} \cdot d\overset{-}{\tilde{\omega}}_{34} \right).$$

Aus den Periodizitätseigenschaften von $\tilde{\omega}_{12}$ und $\tilde{\omega}_{34}$ folgt zunächst, dafs die rechtsstehende p-gliedrige Summe gleich Null ist. Ferner ist

$$\text{an } l_1: \quad d\overset{+}{\tilde{\omega}}_{34} = d\overset{-}{\tilde{\omega}}_{34},$$

$$\overset{+}{\tilde{\omega}}_{12} - \overset{-}{\tilde{\omega}}_{12} = 2\pi i,$$

$$\text{an } l_2: \quad d\overset{+}{\tilde{\omega}}_{34} = d\overset{-}{\tilde{\omega}}_{34},$$

$$\overset{+}{\tilde{\omega}}_{12} - \overset{-}{\tilde{\omega}}_{12} = 2\pi i,$$

und daher:

$$\int\limits_{\varepsilon_1}^{\omega}\Big|_{l_1}\left(\bar{\tilde{\omega}}_{12}\, d\bar{\tilde{\omega}}_{34} - \overset{+}{\tilde{\omega}}_{12}\,.\, d\overset{+}{\tilde{\omega}}_{34}\right) = -2\pi i \cdot \int\limits_{\varepsilon_1}^{\omega}\Big|_{l_1} d\tilde{\omega}_{34}$$

$$= -2\pi i\,.\,[\tilde{\omega}_{34}(\omega) - \tilde{\omega}_{34}(\varepsilon_1)],$$

$$\int\limits_{\omega}^{\varepsilon_2}\Big|_{l_2}\left(\overset{+}{\tilde{\omega}}_{12}\, d\overset{+}{\tilde{\omega}}_{34} - \bar{\tilde{\omega}}_{12}\,.\, d\bar{\tilde{\omega}}_{34}\right) = -2\pi i \cdot \int\limits_{\omega}^{\varepsilon_2}\Big|_{l_2} d\tilde{\omega}_{34}$$

$$= -2\pi i\,[\tilde{\omega}_{34}(\varepsilon_2) - \tilde{\omega}_{34}(\omega)].$$

Hieraus folgt:

$$4^0) \qquad U = 2\pi i\,[\tilde{\omega}_{34}(\varepsilon_1) - \tilde{\omega}_{34}(\varepsilon_2)],$$

und durch Vergleichung von 3^0) und 4^0):

$$5^0) \qquad \tilde{\omega}_{12}(\varepsilon_3) - \tilde{\omega}_{12}(\varepsilon_4) = \tilde{\omega}_{34}(\varepsilon_1) - \tilde{\omega}_{34}(\varepsilon_2),$$

oder

$$5^0_a) \qquad \int\limits_{\varepsilon_4}^{\varepsilon_3} d\tilde{\omega}_{12} = \int\limits_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} d\tilde{\omega}_{34}\,.^{*)}$$

Satz VI⁰) Ein Normalintegral III. Gattung ändert seinen Wert nicht, wenn man seine logarithmischen Unstetigkeitsstellen mit seinen Grenzen vertauscht.

Nennt man die Koordinaten σ_1, ζ_1 und σ_2, ζ_2 von ε_1 und ε_2 die Parameter, die Koordinaten σ_3, ζ_3 und σ_4, ζ_4 von ε_3 und ε_4 die Argumente von $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int\limits_{\varepsilon_3}^{\varepsilon_4} d\tilde{\omega}_{12}$, so kann man auch sagen:

---

*) Die Gleichung 5^0_a) ist nur dann genau, wenn die Integrationswege links und rechts die Begrenzung der zu $\tilde{\omega}_{12}$ resp. $\tilde{\omega}_{34}$ gehörigen Fläche T'' nicht überschreiten; kreuzen die Integrationswege die Querschnitte, so sind die zwei Seiten von 5^0_a) einander gleich bis auf ganzzahlige Vielfache der Periodizitätsmoduln.

Dies giebt den

Satz VI$_a^0$) Ein Normalintegral III. Gattung ändert seinen Wert nicht, wenn man in ihm Argument und Parameter vertauscht.

In dieser Form wird der Vertauschungssatz für das Normalintegral III. Gattung zumeist ausgesprochen.

§ 25. Zerlegung des allgemeinen Abel'schen Integrales.

Es sei τ eine algebraische Funktion der Klasse, $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\varkappa \dots \varepsilon_q$ ihre Unstetigkeitspunkte, $\nu_1 \dots \nu_\varkappa \dots \nu_q$ die Ordnungen des Unstetigwerdens von τ in diesen Punkten, $G_1 \dots G_\varkappa \dots G_q$ die zugehörigen Residuen, und allgemein:

$$1^0) \quad \text{in } \varepsilon_\varkappa \, (z = \zeta_\varkappa): \quad \tau = \frac{G_\varkappa}{z - \zeta_\varkappa} + \frac{A_1^{(\varkappa)}}{(z - \zeta_\varkappa)^2} + \frac{A_2^{(\varkappa)}}{(z - \zeta_\varkappa)^3} + \dots \dots + \frac{A_{\nu_\varkappa - 1}^{(\varkappa)}}{(z - \zeta_\varkappa)^{\nu_\varkappa}} + \text{f. c.} \dots$$

Nach § 23 und 24 ist dann, wenn J das Integral der Klasse

$$2^0) \qquad J = \int \tau \, dz$$

bezeichnet, und berücksichtigt wird, dafs zufolge $G_1 + \dots + G_q = 0$:

$$G_q \,.\, P(o, \varepsilon_q) = -\sum_{\varkappa=1}^{q-1} G_\varkappa \,.\, P(o \,.\, \varepsilon_q)$$

ist, die Differenz:

$$J - \sum_{\varkappa=1}^{q-1} G_\varkappa \,.\, \tilde{\omega}(\varepsilon_\varkappa, \varepsilon_q)$$
$$-\sum_{\varkappa=1}^{q} \Big[-A_1^{(\varkappa)} \,.\, t(o, \varepsilon_\varkappa) - \frac{2}{1!} A_2^{(\varkappa)} \,.\, t^{(2)}(o, \varepsilon_\varkappa)$$
$$- \frac{3}{2!} A_3^{(\varkappa)} \,.\, t^{(3)}(o, \varepsilon_\varkappa) - \dots - \frac{\nu_\varkappa - 1}{(\nu_\varkappa - 2)!} A_{\nu_\varkappa - 1}^{(\varkappa)} \,.\, t^{(\nu_\varkappa - 1)}(o, \varepsilon_\varkappa) \Big]$$

ein in der Fläche T überall endliches Integral der Klasse, also ein Integral I. Gattung $w = \sum_{\mu=1}^{p} c_\mu w_\mu + \text{const.}$ Für das Integral J ergiebt sich hieraus die Zerlegungsformel:

$$\text{I}^0) \quad \begin{cases} J = \int \tau\, dz \\ \quad = \sum_{\varkappa=1}^{q-1} G_\varkappa . \tilde{\omega}(\varepsilon_\varkappa, \varepsilon_q) \\ \quad - \sum_{\varkappa=1}^{q} \Big[A_1^{(\varkappa)} . t(o, \varepsilon_\varkappa) + \frac{2}{1!} A_2^{(\varkappa)} . t^{(2)}(o, \varepsilon_\varkappa) \\ \qquad + \frac{3}{2!} A_3^{(\varkappa)} . t^{(3)}(o, \varepsilon_\varkappa) + \ldots + \frac{\nu_\varkappa - 1}{(\nu_\varkappa - 2)!} A_{\nu_\varkappa - 1}^{(\varkappa)} . t^{(\nu_\varkappa - 1)}(o, \varepsilon_\varkappa) \Big] \\ \quad + \sum_{\mu=1}^{p} c_\mu w_\mu + \text{konstans.}, \end{cases}$$

welche den Satz enthält:

Satz I⁰) Das allgemeine Abel'sche Integral $J = \int \tau dz$ läfst sich darstellen als Summe von geeignet gewählten Integralen I., II. und III. Gattung.

Aus der Formel I⁰), in der allgemein

$$c_\mu = \frac{1}{\pi i} \text{ mal dem Periodizitätsmodul von } J \text{ an } a_\mu$$

ist, folgt ferner:

Satz II⁰) Ein Abel'sches Integral $J = \int \tau dz$ ist bis auf eine additive Konstante vollständig bestimmt, wenn gegeben sind:

1⁰) die Unstetigkeitspunkte $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\varkappa \ldots \varepsilon_q \ldots$ mit den zugehörigen Residuen $G_1 \ldots G_\varkappa \ldots G_q$ und den Koeffizienten $A_1^{(\varkappa)} \ldots A_{\nu_\varkappa - 1}^{(\varkappa)}$ $(\varkappa = 1, \ldots q)$, wobei $G_1 + \ldots + G_q = 0$ sein mufs, und

2⁰) die Periodizitätsmoduln von J an p von den $2p$ Querschnitten a_λ, b_λ, oder die reellen (oder auch die rein imaginären) Bestandteile der Periodizitätsmoduln an sämtlichen Querschnitten a_λ, b_λ.

Die Formel I⁰) läfst sich vereinfachen, wenn man einen Begriff zu Grunde legt, den wir jetzt einführen wollen.

Es seien K_1, $K_2 \ldots K_m$ Integrale der Klasse ohne gloarithmische Unstetigkeiten, also Integrale I. und II. Gattung. Wir nennen diese m Integrale algebraisch unabhängig, wenn die Summe

$$3^\circ) \qquad S = \sum_{\varkappa=1}^{m} A_\varkappa \, . \, K_\varkappa,$$

worin die $A_\varkappa$ zur Verfügung stehende, konstante Koeffizienten sind, sich dann und nur dann auf eine algebraische Funktion der Klasse reduziert, wenn die m Koefficienten $A_\varkappa$ alle gleich Null gesetzt werden.

Wir bestimmen die Anzahl der algebraisch unabhängigen Integrale I. und II. Gattung. — Die Summe $S = \sum_{\varkappa=1}^{m} A_\varkappa \, . \, K_\varkappa$ reduziert sich dann und nur dann auf eine Funktion der Klasse, wenn die $2p$ Periodizitätsmoduln von S an a_λ, b_λ $(\lambda = 1 \ldots p)$ gleich Null sind. Schreiben wir diese Bedingungen an, so giebt das $2p$ Gleichungen, die in den $A_\varkappa$ linear und homogen sind. Ist nun $m > 2p$, so haben diese Gleichungen stets ein System von Lösungswerten $A_\varkappa$, die nicht alle Null sind. Die Anzahl der algebraisch unabhängigen Integrale I. und II. Gattung kann also nicht $> 2p$ sein.

Andererseits lassen sich stets $2p$ algebraisch unabhängige Integrale I. und II. Gattung auffinden. Nimmt man nämlich die p linearunabhängigen Normalintegrale $u_1 \ldots u_p$, und dazu p Normalintegrale II. Gattung $t(o, \gamma_1) \ldots t(o, \gamma_p)$, deren Unstetigkeitsstellen $\gamma_1 \ldots \gamma_p$ so gewählt sind, dafs die Determinante:

$$4^\circ) \qquad D = \begin{vmatrix} u_1'(\gamma_1) & u_1'(\gamma_2) \ldots u_1'(\gamma_p) \\ u_2'(\gamma_1) & u_2'(\gamma_2) \ldots u_2'(\gamma_p) \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_p'(\gamma_1) & u_p'(\gamma_2) \ldots u_p'(\gamma_p) \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, so sind diese $2p$ Integrale algebraisch unabhängig.

Bildet man nämlich die Summe:

$$S = \sum_{\lambda=1}^{p} A_\lambda u_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{p} B_\lambda \, . \, t(o, \gamma_\lambda),$$

so hat dieselbe

an a_ν den Periodizitätsmodul: $A_\nu \pi i$,

$$„ \quad b_\nu \quad „ \qquad „ \qquad : \sum_{\lambda=1}^{p} A_\lambda \,.\, a_{\lambda\nu} - 2 \sum_{\lambda=1}^{p} B_\lambda \,.\, u'_\nu(\gamma_\lambda),$$

und die p Integrale $u_1 \ldots u_p$, $t(o, \gamma_1) \ldots t(o, \gamma_p)$ sind nur dann nicht algebraisch unabhängig, wenn diese $2p$ Periodizitätsmoduln von S gleich Null sind.

Die Periodizitätsmoduln von S an $a_1 \ldots a_p$ werden aber nur dann Null, wenn alle $A_\lambda = o$ sind, und die Periodizitätsmoduln von S an den Querschnitten b_ν $(\nu = 1 \ldots p)$ verschwinden, wenn alle $A_\lambda = o$ sind, dann und nur dann, wenn die Koeffizienten $B_1 \ldots B_p$ den Gleichungssystem genügen:

$$\begin{aligned} B_1 \,.\, u'_1(\gamma_1) + B_2 \,.\, u'_1(\gamma_2) + \ldots + B_p \,.\, u'_1(\gamma_p) &= o, \\ B_1 \,.\, u'_2(\gamma_1) + B_2 \,.\, u'_2(\gamma_2) + \ldots + B_p \,.\, u'_2(\gamma_p) &= o, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_1 \,.\, u'_p(\gamma_1) + B_2 \,.\, u'_p(\gamma_2) + \ldots + B_p \,.\, u'_p(\gamma_p) &= o. \end{aligned}$$

Die Auflösungsdeterminante dieses Systems ist die nach Voraussetzung von Null verschiedene Determinante D. Den Gleichungen dieses Systems wird also nur genügt durch das Lösungssystem $B_1 = B_2 = \ldots = B_p = o$. S reduziert sich daher nur dann auf eine algebraische Funktion der Klasse, wenn alle Koeffizienten A_λ und B_λ $(\lambda = 1 \ldots p)$ gleich Null angenommen werden, d. h. die $2p$ Integrale

$$u_1 \ldots u_p \,.\, t(o, \gamma_1), \ldots t(o, \gamma_p)$$

sind algebraisch unabhängig.

Die Anzahl der algebraisch unabhängigen Integrale I. und II. Gattung ist also gleich $2p$. Ein solches System von Integralen nennen wir ein Fundamentalsystem.

Die Integrale eines Fundamentalsystems sind nicht notwendigerweise Normalintegrale. Hat man die Punkte $\gamma_1 \ldots \gamma_p$ so gewählt, dafs die Determinante $D \neq o$ ist, so bilden irgend p linearunabhängige Integrale Grade I. Gattung $w_1 \ldots w_p$ zusammen mit irgend p Integralen II. Gattung mit den Unstetigkeitspunkten 1. Ordnung $\gamma_1 \ldots \gamma_q$ ebenfalls ein Fundamentalsystem. Aufserdem brauchen auch die Punkte

$\gamma_1 \dots \gamma_q$ nicht alle von einander getrennt zu liegen. Fallen z. B. die 3 Punkte $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ in den einen Punkt γ zusammen, so bilden die p Integrale $u_1 \dots u_p$ zusammen mit den Normalintegralen II. Gattung $t(o, \gamma), t^{(2)}(o, \gamma), t^{(3)}(o, \gamma), t(o, \gamma_4) \dots t(o, \gamma_p)$ wieder ein Fundamentalsystem, und die Determinante D in 4º) geht über in:

$$D_1 = \begin{vmatrix} u_1'(\gamma) & u_1''(\gamma) & u_1'''(\gamma) & u_1'(\gamma_4) \dots u_1'(\gamma_p) \\ u_2'(\gamma) & u_2''(\gamma) & u_2'''(\gamma) & u_2'(\gamma_4) \dots u_2'(\gamma_p) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_p'(\gamma) & u_p''(\gamma) & u_p'''(\gamma) & u_p'(\gamma_4) \dots u_p'(\gamma_p) \end{vmatrix}.$$

Es können sogar sämtliche p Punkte $\gamma_1 \dots \gamma_p$ in einem Punkte sich vereinigen. Bildet man nämlich die Determinante:

$$5º) \qquad D_2 = \begin{vmatrix} u_1'(\gamma) & u_2''(\gamma) \dots u_1^{(p)}(\gamma) \\ u_2'(\gamma) & u_2''(\gamma) \dots u_2^{(p)}(\gamma) \\ \cdot & \cdot \\ u_p'(\gamma) & u_p''(\gamma) \dots u_p^{(p)}(\gamma) \end{vmatrix},$$

wo $u', u'', \dots u^{(p)}$ die erste, zweite, ... p-te Derivierte des Integrals I. Gattung u bezeichnen, so folgt aus der Linearunabhängigkeit von $u_1' \dots u_p'$, dafs D_2 nicht für alle Lagen der Punkte γ gleich Null sein kann. Wählt man daher den Punkt γ so, dafs $D_2 \neq 0$ ist, so bilden die $2p$ Integrale

$$u_1, u_2, \dots u_p, \ t(o, \gamma), \ t^{(2)}(o, \gamma), \ t^{(3)}(o, \gamma), \dots t^{(p)}(o, \gamma)$$

ein Fundamentalsystem.

Die Wichtigkeit des eben eingeführten Begriffes des Fundamentalsystems beruht auf folgendem Satz:

Satz IIIº) Jedes Abel'sche Integral J ohne logarithmische Unstetigkeitspunkte läfst sich darstellen als Summe einer ganzen linearen Funktion der $2p$ Integrale eines Fundamentalsystems mit konstanten Koeffizienten und einer algebraischen Funktion der Klasse.

Beweis: Bezeichnen $\alpha_\lambda, \beta_\lambda$ ($\lambda = 1, \dots p$) die Periodizitätsmoduln von J an a_λ, b_λ, so lauten die Bedingungen dafür, dafs die Differenz

$$\Delta = J - \sum_{\lambda=1}^{p} [A_\lambda \,.\, u_\lambda + B_\lambda \,.\, t(o \,.\, \gamma_\lambda)]$$

an allen $2p$ Querschnitten a_λ, b_λ verschwindende Periodizitätsmoduln besitzt:

$$\alpha_\lambda = A_\lambda \,.\, \pi i, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots p.$$

$$\beta_\lambda - \sum_{\mu=1}^{p} A_\mu \,.\, a_{\mu\lambda} = -2 \sum_{\mu=1}^{p} B_\mu \,.\, u'_\lambda(\gamma_\mu), \qquad \lambda = 1, 2, \ldots p$$

Die ersten p Bedingungsgleichungen bestimmen $A_1 \ldots A_p$. Die p letzten sind in $B_1 \ldots B_p$ linear und nicht homogen, und ihre Auflösungsdeterminante ist nach Voraussetzung von Null verschieden. Diese $2p$ Bedingungsgleichungen liefern also für $A_1 \ldots A_p$, $B_1 \ldots B_p$ bestimmte endliche Werte, die nicht alle $= 0$ sind und deren Einsetzen in $\varDelta$ alle $2p$ Periodizitätsmoduln von $\varDelta$ zum Verschwinden bringt. $\varDelta$ ist dann eine algebraische Funktion $R(s, z)$ der Klasse, d. h. es ist:

$$J = \sum_{\lambda=1}^{p} [A_\lambda \,.\, u_\lambda + B_\lambda \,.\, t(o, \gamma_\lambda)] + R(s, z), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Auf Grund des eben bewiesenen Satzes lassen sich in der Darstellungsformel I⁰) dieses Paragraphen für das allgemeine Abel'sche Integral die Integrale I. und II. Gattung ersetzen durch $2p$ Integrale eines Fundamentalsystems. Es ergiebt sich so für das allgemeine Abel'sche Integral J die Zerlegungsformel:

II⁰) $$J = \int r\, dz$$

$$= R(s, z) + \sum_{\varkappa=1}^{q-1} G_\varkappa\, \tilde{\omega}(\varepsilon_\varkappa \varepsilon_q) + \sum_{\varkappa=1}^{p} [A_\lambda \,.\, u_\lambda + B_\lambda \,.\, t(o, \gamma_\lambda)],$$

oder, abgekürzt:

II$_a$⁰) $$J = R(s, z) + \Pi + T.$$

wo Π nur logarithmische Unstetigkeiten aufweist, und T nur algebraische Unstetigkeiten erster Ordnung besitzt.

Für die in II⁰) und II$_a$⁰) auftretende Funktion $R(s, z)$ der Klasse gilt noch der Satz

Satz IV⁰) Sind die p Punkte $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_p$ ein für allemal gewählt, so ist $R(s, z)$ vollständig bestimmt bis auf eine additive Konstante.

Beweis: Angenommen, es sei:

$$J = R_1(s, z) + \Pi_1 + T_1$$

ein auf anderem Wege gefundener Ausdruck für J, wobei Π_1 und T_1 von derselben Natur seien wie früher Π und T. Die Differenz

$$R(s, z) - R_1(s, z) = \Pi_1 - \Pi + T_1 - T$$

ist dann ein Integral der Klasse, das keine logarithmischen Unstetigkeiten mehr besitzt und nur mehr in Punkten der Gruppe $\gamma_1 \dots \gamma_p$ zur ersten Ordnung algebraisch unstetig wird. Ist z. B.

$$\text{in } \gamma_\lambda (z = \zeta_\lambda): \quad R - R_1 = \frac{K_\lambda}{z - \zeta_\lambda} + \text{f. c.,} \quad (\lambda = 1, 2 \dots p)$$

so ist

$$V = R - R_1 - \sum_{\lambda=1}^{p} K_\lambda \,.\, t(o, \gamma_\lambda)$$

ein in T überall endliches Integral, dessen Periodizitätsmoduln an a_λ $(\lambda = 1 \dots p)$ alle $= 0$ sind, also eine Konstante. Die Periodizitätsmoduln von V an den p Querschnitten b_λ sind daher ebenfalls gleich Null, d. h. es ist:

$$\sum_{\lambda=1}^{p} K_\lambda \,.\, u'_\mu(\gamma_\lambda) = 0 \qquad \text{für } \mu = 1, 2 \dots p.$$

Die Auflösungsdeterminante dieser p Gleichungen ist aber nach Voraussetzung von Null verschieden; es ist folglich:

$$K_\lambda = 0 \qquad \text{für } \lambda = 1, 2 \dots p$$

d. h. $$R - R_1 = \text{constans,}$$ w. z. b. w.

Die Funktion $R(s, z)$ hat zu Unstetigkeitspunkten die Punkte $\gamma_1 \dots \gamma_p$ und die Punkte, in denen die Differenz $J - \Pi$ algebraisch unstetig wird. Die Aufgabe, diese Funktion wirklich rational durch s und z darzustellen, findet ihre Erledigung durch die Erörterungen des nächsten Kapitels.

Sind die Unstetigkeitspunkte $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_q$ von τ gegeben und für jeden dieser Punkte die Entwickelung von τ, soweit sie das Unstetigwerden in diesem Punkte charakterisiert, so

lassen sich die in Formel II⁹) auftretenden konstanten Koeffizienten $A_1 \ldots A_p$, $B_1 \ldots B_p$ unschwer bestimmen. Näheres hierüber findet man bei Appell und Goursat, Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales p. 345—49.

Wir behandeln weiter die Aufgabe:

Anzugeben, unter welchen Bedingungen das Abel'sche Integral

$$J = \int \tau \, dz$$

sich auf eine algebraische Funktion der Klasse reduziert.

Die erste zu erfüllende Bedingung ist, dafs alle Residuen $G_\varkappa$ von τ gleich Null seien. Ist diese Bedingung erfüllt, so lassen sich die weiteren Bedingungen im Anschlufs an das Vorige, daraus ableiten, dafs im Ausdrucke II⁹) für J alle Koeffizienten A_λ und B_λ gleich Null sein müssen. — Wir leiten diese weiteren Bedingungen auf einem etwas andern Wege ab.

Bezeichnen K_λ, L_λ die Periodizitätsmoduln von J an a_λ, b_λ, so ist das Randintegral $\int\limits_{(T')} u_\mu \, dJ = \int\limits_{(T')} u_\mu \, . \, \tau \, . \, dz$

$$\text{einerseits} = \sum_{\lambda=1}^{p} \left(\binom{\lambda}{\mu} \pi i \, . \, L_\lambda - a_{\mu\lambda} K_\lambda \right),$$

und andererseits $= 2 \pi i$. mal der Summe der Residuen von

$$u_\mu \, . \, \tau \text{ in } T';$$

ebenso ist das Randintegral $\int\limits_{(T')} t\,(o, \gamma_\mu) \, . \, \tau \, dz$ einerseits gleich $-2 \sum\limits_{\lambda=1}^{p} u'_\lambda(\gamma_\mu) \, . \, K_\lambda$ und andererseits gleich $2 \pi i$ mal der Summe der Residuen von $t\,(o, \gamma_\mu) \, . \, \tau$ in T'.

Soll nun $J = \int \tau \, dz$ eine algebraische Funktion der Klasse sein, so müssen, aufser der Bedingung $G_\varkappa = 0$ $(\varkappa = 1 \ldots q)$, auch noch sämtliche Periodizitätsmoduln K_λ, L_λ

von J gleich Null sein, d. h. es mufs, nach dem eben Bewiesenen, die Summe aller Residuen von $u_\mu . \tau$ und die Summe aller Residuen von $t(o, \gamma_\mu) . \tau$ in T' gleich Null sein (für $\mu = 1, 2 \ldots p$). Sind umgekehrt diese letztern Bedingungen erfüllt, so sind auch alle K_λ, L_λ gleich Null. Ist nämlich die Summe der Residuen von $t(o, \gamma_\mu) . \tau$ in T' gleich Null für $\mu = 1, 2 \ldots p$, so gelten die p Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{p} u'_\lambda(\gamma_\mu) . K_\lambda = 0, \qquad \mu = 1, 2 \ldots p$$

aus denen sich, da ihre Auflösungsdeterminante

$$D = \begin{vmatrix} u'_1(\gamma_1) \ldots u'_1(\gamma_p) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ u'_p(\gamma_1) \ldots u'_p(\gamma_p) \end{vmatrix}$$

nach Voraussetzung von Null verschieden ist, ergiebt:

$$K_1 = K_2 = \ldots = K_p = 0.$$

Ist aufserdem auch die Summe der Residuen von $u_\mu . \tau$ in T' gleich Null für $\mu = 1, \ldots p$, so folgt aus den p Gleichungen:

$$\pi i . L_\mu - \sum_{\lambda=1}^{p} a_{\mu\lambda} . K_\lambda = 0 \qquad \mu = 1, 2 \ldots p,$$

unmittelbar:

$$L_1 = L_2 = \ldots = L_p = 0.$$

Wir haben so das Resultat:

Satz V°.) Die notwendigen und ausreichenden Bedingungen dafür, dafs ein Abel'sches Integral $J = \int \tau \, dz$ sich auf eine algebraische Funktion der Klasse reduziere, sind:

1°) dafs sämtliche Residuen von τ Null seien;

2°) dafs die Summe aller Residuen von $u_\mu . \tau$ $(\mu = 1, 2 \ldots p)$ in T' gleich Null sei;

3°) dafs die Summe aller Residuen von $t(o, \gamma_\mu) . \tau$ $(\mu = 1, 2 \ldots p)$ in T' gleich Null sei, wenn die $2p$ Integrale $u_1 \ldots u_p$, $t(o, \gamma_1), \ldots t(o, \gamma_p)$ ein Fundamentalsystem bilden.

Zum Schlufs geben wir noch eine Anwendung der Formel I⁰) dieses Paragraphen auf die Darstellung des Logarithmus einer algebraischen Funktion der Klasse.

Es sei τ eine algebraische Funktion der Klasse; ihre Nullpunkte und Unstetigkeitspunkte, die wir der Einfachheit halber als im Endlichen gelegen und mit keinem Verzweigungspunkte zusammenfallend annehmen, seien

$$\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\varkappa \ldots \varepsilon_q \text{ und } \beta_1 \ldots \beta_\varrho \ldots \beta_r,$$

die zugehörigen Ordnungszahlen

$$\mu_1 \ldots \mu_\varkappa \ldots \mu_q \text{ und } \nu_1 \ldots \nu_\varrho \ldots \nu_p.$$

Bezeichnet dann $\tau(\alpha)$ den Wert von τ im willkürlich angenommenen festen Punkte $z = \alpha$, $\tau(o)$ den Wert von τ im variabelen Punkte (s, z), so ist

$$\log \frac{\tau(o)}{\tau(\alpha)} = \int_\alpha^o \frac{1}{\tau} \cdot \frac{d\tau}{dz} \cdot dz.$$

Die Unstetigkeiten dieses Integrals der Klasse sind leicht zu ermitteln. Ist nämlich

in $\varepsilon_\varkappa (z = \eta_\varkappa)$: $\quad \tau = (z - \eta_\varkappa)^{\mu_\varkappa} [A_\varkappa + B_\varkappa (z - \eta_\varkappa) + \ldots], \; A_\varkappa \neq 0$

so ist ebendaselbst:

$$\frac{d\tau}{dz} = (z - \eta_\varkappa)^{\mu_\varkappa - 1} \cdot [\mu_\varkappa A_\varkappa + (\mu_\varkappa + 1) B_\varkappa (z - \eta_\varkappa) + \ldots],$$

und daher

$$\frac{1}{\tau} \cdot \frac{d\tau}{dz} = \frac{\mu_\varkappa}{z - \eta_\varkappa} + \text{f.c.}$$

Ebenso ergiebt sich aus der in der Umgebung von $\beta_\varrho (z = \zeta_\varrho)$ gültigen Entwickelung:

$$\tau = \frac{1}{(z - \zeta_\varrho)^{\nu_\varrho}} \cdot [A'_\varrho + B'_\varrho (z - \zeta_\varrho) + \ldots],$$

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{1}{(z - \zeta_\varrho)^{\nu_\varrho + 1}} [- \nu_\varrho \cdot A'_\varrho + (1 - \nu_\varrho) B'_\varrho (z - \zeta_\varrho) + \ldots],$$

und somit:

$$\frac{1}{\tau} \cdot \frac{d\tau}{dz} = \frac{-\nu_\varrho}{z - \zeta_\varrho} + \text{f. c.}$$

Das Integral $\int \frac{1}{\tau} \cdot \frac{d\tau}{dz}$ wird daher in sämtlichen Punkten $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_q$, $\beta_1 \ldots \beta_r$ logarithmisch unstetig, und die zugehörigen Residuen sind $\mu_1 \ldots \mu_q$, $-\nu_1, \ldots -\nu_r$. Weitere Unstetigkeiten besitzt das Integral nicht. — Nach I⁰) gilt somit der

Satz VI⁰) Der Logarithmus einer algebraischen Funktion τ der Klasse läfst sich darstellen in der Form:

$$\text{III}^0) \qquad \log \tau = \sum_{\varkappa=1}^{q} \mu_\varkappa \cdot \tilde{\omega}(\varepsilon_\varkappa, \beta_r) - \sum_{\varrho=1}^{r-1} \nu_\varrho \cdot \tilde{\omega}(\beta_\varrho, \beta_r)$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{p} c_\lambda u_\lambda + \text{constans.}$$

Die in dieser Formel auftretenden konstanten Koeffizienten $c_1 \ldots c_p$ sind gerade, ganze Zahlen (oder 0), wie man sogleich einsieht, wenn man berücksichtigt, dafs die Periodizitätsmoduln von $\log \tau$ an den Querschnitten $a_1 \ldots a_p$ ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$ sein müssen.

---

§ 26. Das Abel'sche Theorem.*)

In diesem Paragraphen sollen einige für die Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale äufserst wichtige Beziehungen abgeleitet werden, die nach ihrem Entdecker mit dem gemeinsamen Namen „Abel'sches Theorem" bezeichnet werden. Der im Folgenden gegebenen Ableitung liegt die Voraussetzung zu Grunde, dafs die

*) Abel, Oeuvres complètes. I. pag. 145 (1826) u. pag. 515 (1829). — Riemann, Ges. Werke pag. 116 ff. — Clebsch u. Gordan, Abel'sche Funktionen pag. 44 u. 127 (1866). — Die hier gegebene Ableitung schliefst sich an die Abhandlung von Herrn H. Weber, Math. Anm. Bd. VIII, pag. 48 bis 53 an.

definierende Grundgleichung $F\binom{n\ m}{s, z} = 0$ der Klasse normalisiert sei im Sinne des § 9), so dafs unter anderm im Unendlichen keine Verzweigungspunkte vorhanden sind.

Es sei τ eine Funktion der Klasse, die
in den Punkten $\beta_1 \ldots \beta_\varkappa \ldots \beta_k$ gleich Null wird zu den Ordnungen $m_1, \ldots m_\varkappa, \ldots m_k$,
und in den Punkten $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_r$ gleich ∞ zu den Ordnungen $n_1 \ldots n_\varrho \ldots n_p$,
so dafs

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} m_\varkappa = \sum_{\varrho=1}^{r} n_\varrho = q$$

ist, wenn q die Ordnung von τ bezeichnet.

Ferner sei ω ein Integral der Klasse, dessen Integrand $\omega' = \frac{d\omega}{dz}$ in einem beliebigen, im Endlichen gelegenen Punkte ε_α $(z = \zeta_\alpha)$, der ein $(v_\alpha - 1)$facher Verzweigungspunkt von T ist, die Entwickelung:

$$1^0)\quad \omega' = (z - \zeta_\alpha)^{\frac{\mu}{v_\alpha}} \cdot \left[c_\mu + c_{\mu+1}(z - \zeta_\alpha)^{\frac{1}{v_\alpha}} + \ldots\right],$$

$(v_\alpha =$ einer der Zahlen $1, 2 \ldots n)$

und in einem beliebigen der n ∞ fernen Punkte T die Entwickelung:

$$2^0)\quad \omega' = \frac{b_\nu}{z^\nu} + \frac{b_{\nu+1}}{z^{\nu+1}} + \ldots$$

besitzt. Dieser Integrand ω' wird dann in allen denjenigen Punkten ε_α unstetig, für welche $\mu < 0$ ist, etwa in den Punkten $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\alpha \ldots \varepsilon_s$, und besitzt im Unendlichen nur dann ein von Null verschiedenes Residuum, wenn $\nu \lesseqqgtr 1$ ist. Letzteres möge in den Punkten $\delta_1 \ldots \delta_\sigma, \ldots \delta_t$ der Fall sein.

Schliefslich besitze ω an den Querschnitten a_λ, b_λ die Periodizitätsmoduln A_λ, B_λ.

Wir bilden nun die Funktion:

$$3^0)\quad \Phi = \log \tau \cdot \frac{d\omega}{dz}.$$

Der zweite Faktor $\omega' = \frac{d\omega}{dz}$ ist in T eindeutig. Der erste Faktor $\log \tau$ ist, wie aus dem Schlufsresultat des vorigen Paragraphen hervorgeht, ein Integral der Klasse, das nur logarithmische Unstetigkeitspunkte besitzt, und zwar sind das die Punkte $\beta_\varkappa$ und γ_ϱ. Dieser Faktor wird erst eindeutig in der einfach zusammenhängenden Fläche T'', die man erhält, wenn man in T' von dem gemeinsamen Kreuzungspunkte η der Querschnitte c_λ aus nach sämtlichen Punkten $\beta_\varkappa$ und γ_ϱ Schnitte $l_\varkappa$ und l'_ϱ anlegt, die weder einander noch die Schnitte a_λ, b_λ, c_λ schneiden (Fig. 36).

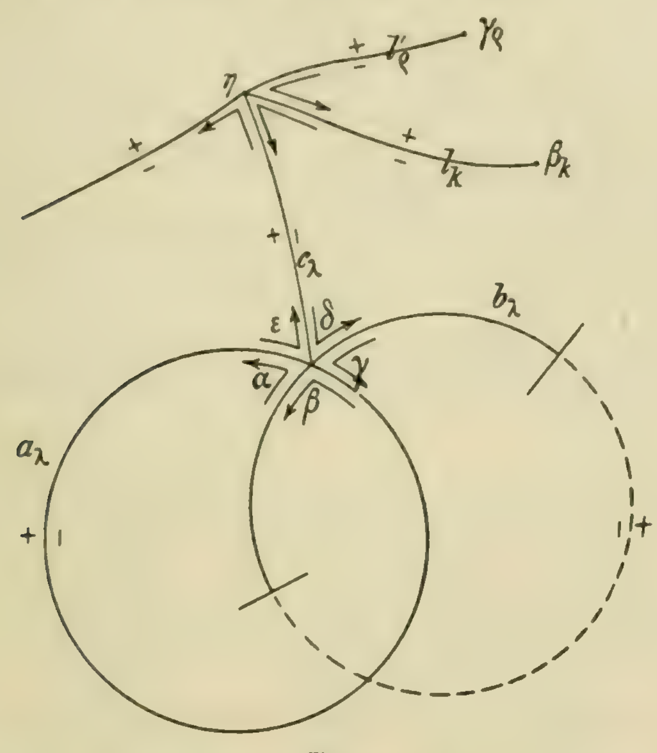


Fig. 36.

Unterscheidet man die Ränder dieser Schnitte als $+$ und $-$ Rand so, dafs ein $+$ Umlauf um einen der Punkte $\beta_\varkappa$, γ_ϱ von der negativen Seite des betreffenden Schnittes auf die positive Seite desselben führt, so hat $\log \tau$ an $l_\varkappa$ $(\varkappa = 1 \ldots k)$ den Periodizitätsmodul $m_\varkappa . 2\pi i$, und an l'_ϱ $(\varrho = 1 \ldots r)$ den Periodizitätsmodul $-n_\varrho . 2\pi i$. Aufserdem besitzt $\log \tau$ an a_λ, b_λ die Periodizitätsmoduln

$$2\pi i . g_\lambda, \; 2\pi i . h_\lambda,$$

wo g_λ, h_λ $(\lambda = 1 \ldots p)$ ganze Zahlen bezeichnen, die vollständig definiert sind durch die Integrale

$$4^0) \quad 2\pi i g_\lambda = \int \begin{vmatrix} \gamma \\ b \\ \beta \end{vmatrix}_\lambda d \log \tau, \quad 2\pi i \,.\, h_\lambda = \int \begin{vmatrix} \alpha \\ a \\ \beta \end{vmatrix}_\lambda d \log \tau.$$

Wir betrachten nunmehr das Randintegral:

$$5^0) \qquad V = \int\limits_{(T'')} \log \tau \,.\, \omega' \,.\, dz = \int\limits_{(T'')} \Phi \,.\, dz,$$

wo die Integration sich in positiver Richtung über die ganze Begrenzung von T'' erstreckt. Drückt man dieses Integral aus, einmal durch die Residuen, die der Integrand in T'' besitzt, das andere Mal durch die Periodizitätsmoduln, so ergiebt die Gleichsetzung der so erhaltenen Werte das allgemeine Abel'sche Theorem.

Wir bestimmen zunächst die Residuen von Φ in T''. — Der erste Faktor $\log \tau$ von Φ wird in T'' nicht mehr unstetig. Setzt man also voraus, dafs die Punkte $\beta_\varkappa$ und γ_ϱ mit keinem der Punkte ε_α und δ_σ zusammenfallen, so hat $\log \tau$ in der Umgebung der Punkte ε_α und δ_σ Entwickelungen von der Form:

$$5^0) \quad \text{für } \varepsilon_\alpha: \log \tau = C_0 + C_1 (z - \zeta_\alpha)^{\frac{1}{v_\alpha}} + C_2 (z - \zeta_\alpha)^{\frac{2}{v_\alpha}} + \ldots,$$

$$6^0) \qquad \text{für } \delta_\sigma: \log \tau = \Gamma_0 + \frac{\Gamma_1}{z} + \frac{\Gamma_2}{z^2} + \ldots$$

Im Punkt ε_α, für den $\mu < 0$ ist, hat man daher:

$$7^0) \quad \Phi = \left[C_0 + C_1 (z - \zeta_\alpha)^{\frac{1}{v_\alpha}} + C_2 (z - \zeta_\alpha)^{\frac{2}{v_\alpha}} + \ldots\right]$$
$$\cdot (z - \zeta_\alpha)^{\frac{\mu}{v}} \cdot \left[c_\mu + c_{\mu+1} (z - \zeta_\alpha)^{\frac{1}{v}} + \ldots\right].$$

Soll Φ in ε_α ein von Null verschiedenes Residuum besitzen, so mufs die rechte Seite von 7⁰) ein Glied mit dem Nenner $z - \zeta_\alpha$ enthalten. Da für $-\mu < v_\alpha$ ein solches Glied in der Entwickelung von Φ nicht auftreten kann, so hat man Residuen nur zu erwarten für $-\mu \geqq v_\alpha$. Angenommen, es sei:

$$8^0) \qquad -\mu = v_\alpha + \mu_\alpha \quad \text{d. h.} \quad -(\mu + \mu_\alpha) = v_\alpha,$$

wo μ_α irgend eine positive, ganze Zahl (die Null einschliefslich) bedeutet; in der Entwickelung 7°) von Φ haben dann die Glieder mit den Koeffizienten:

$$C_0\, c_{\mu+\mu_\alpha},\ C_1\, c_{\mu+\mu_\alpha-1}, \ldots C_{\mu_\alpha}\, c_\mu$$

den Nenner $z-\zeta_\alpha$. Die Summe S_α der Residuen von Φ in $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\alpha \ldots \varepsilon_s$ ist daher:

$$9°)\quad S_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{s} r_\alpha (C_0\, c_{\mu+\mu_\alpha} + C_1\, c_{\mu+\mu_\alpha-1} + \cdots + C_{\mu_\alpha}\, c_\mu),$$

wo $\mu_\alpha = -(\mu + r_\alpha)$ ist.

Im Punkte δ_σ hat man:

$$10°)\quad \Phi = \left(\Gamma_0 + \frac{\Gamma_1}{z} + \frac{\Gamma_2}{z^2} + \cdots\right) \cdot \left(\frac{b_\nu}{z^\nu} + \frac{b_{\nu+1}}{z^{\nu+1}} + \cdots\right).$$

Soll Φ in diesem Punkte ein von Null verschiedenes Residuum besitzen, so mufs die ganze Zahl $\nu \overline{\gtrless} 1$ sein. Angenommen, es sei

$$11°)\quad \nu = 1 - \nu_\sigma, \quad (\nu_\sigma \text{ einer d. Zahlen } 0, 1, 2, \ldots);$$

der Nenner z, der allein ein Residuum liefert, kommt dann vor in den Gliedern mit den Koeffizienten:

$$\Gamma_0 \cdot b_{\nu+\nu_\sigma},\ \Gamma_1 \cdot b_{\nu+\nu_\sigma-1}, \ldots \Gamma_{\nu_\sigma}\, b_\nu,$$

und die Summen S_σ der Residuen von Φ in den Punkten $\delta_1 \ldots \delta_\sigma \ldots \delta_t$ ist:

$$12°)\quad S_\sigma = -\sum_{\sigma=1}^{t} (\Gamma_0\, b_{\nu+\nu_\sigma} + \Gamma_1\, b_{\nu+\nu_\sigma-1} + \cdots + \Gamma_{\nu_\sigma} \cdot b_\nu),$$

wo $\nu + \nu_\sigma = 1$ ist.

Aufserhalb der Punkte ε_α und δ_σ besitzt Φ in T'' kein weiteres Residuum. Es ist daher:

$$I°)\quad V = 2\pi i \,.$$

$$\left[\sum_{\alpha=1}^{s} r_\alpha (C_0 \cdot c_{\mu+\mu_\alpha} + C_1 \cdot c_{\mu+\mu_\alpha-1} + \cdots + C_{\mu_\alpha}\, c_\mu) \right.$$
$$\left. - \sum_{\sigma=1}^{t} (\Gamma_0 \cdot b_{\nu+\nu_\sigma} + \Gamma_1 \cdot b_{\nu+\nu_\sigma-1} + \cdots \Gamma_{\nu_\sigma} \cdot b_\nu)\right].$$

Andererseits ist:

$$V = \int\limits_{(T')} \log \tau \,.\, \omega' \,.\, dz + \sum_{\varkappa=1}^{k} \int \left|\begin{matrix}\beta \\ l \\ \eta\end{matrix}\right|_{\varkappa} \left(\overset{+}{\log} \tau \,.\, d\overset{+}{\omega} - \overset{-}{\log} \tau \,.\, d\overset{-}{\omega}\right)$$
$$+ \sum_{\varrho=1}^{r} \int \left|\begin{matrix}\gamma \\ l' \\ \eta\end{matrix}\right|_{\varrho} \left(\overset{+}{\log} \tau \,.\, d\overset{+}{\omega} - \overset{-}{\log} \tau \,.\, d\overset{-}{\omega}\right),$$

wo:

$$\int\limits_{(T')} \log \tau \,.\, d\omega = 2\pi i \,.\, \sum_{\lambda=1}^{r} (g_\lambda \,.\, B_\lambda - h_\lambda \,.\, A_\lambda),$$

$$\int \left|\begin{matrix}\beta \\ l \\ \eta\end{matrix}\right|_{\varkappa} \left(\overset{+}{\log} \tau \, d\overset{+}{\omega} - \overset{-}{\log} \tau \,.\, d\overset{-}{\omega}\right) = \int \left|\begin{matrix}\beta \\ l \\ \eta\end{matrix}\right|_{\varkappa} \left(\overset{+}{\log} \tau - \overset{-}{\log} \tau\right) d\omega$$
$$= m_\varkappa \,.\, 2\pi i \,.\, \int \left|\begin{matrix}\beta \\ l \\ \eta\end{matrix}\right|_{\varkappa} d\omega = m_\varkappa \,.\, 2\pi i \,.\, [\omega(\beta_\varkappa) - \omega(\eta)],$$

$$\int \left|\begin{matrix}\gamma \\ l' \\ \eta\end{matrix}\right|_{\varrho} \left(\overset{+}{\log} \tau \,.\, d\overset{+}{\omega} - \overset{-}{\log} \tau \,.\, d\overset{-}{\omega}\right) = -n_\varrho . 2\pi i . \int \left|\begin{matrix}\gamma \\ l' \\ \eta\end{matrix}\right|_{\varrho} d\omega$$
$$= - n_\varrho \,.\, 2\pi i \,.\, [\omega(\gamma_\varrho) - \omega(\eta)] \qquad \text{ist.}$$

Berücksichtigt man daher, dafs $\Sigma m_\varkappa = \Sigma n_\varrho$ ist, so erhält man:

$$\text{II}^{0}) \qquad V = 2\pi i \,.\, \Bigg[\sum_{\lambda=1}^{p} (g_\lambda \,.\, B_\lambda - h_\lambda \, A_\lambda)$$
$$+ \sum_{\varkappa=1}^{k} m_\varkappa \,.\, \omega(\beta_\varkappa) - \sum_{\varrho=1}^{r} n_\varrho \,.\, \omega(\gamma_\varrho)\Bigg].$$

Aus I⁰) und II⁰) ergiebt sich:

$$\text{A}^{0}) \left\{\begin{aligned} & \sum_{\varkappa=1}^{k} m_\varkappa \,.\, \omega(\beta_\varkappa) - \sum_{\varrho=1}^{r} n_\varrho \,.\, \omega(\gamma_\varrho) \\ & = \sum_{\lambda=1}^{p} (h_\lambda \,.\, A_\lambda - g_\lambda \,.\, B_\lambda) \\ & + \sum_{\alpha=1}^{s} \nu_\alpha \, (C_0 \, c_{\mu+\mu_\alpha} + C_1 \,.\, c_{\mu+\mu_\alpha-1} + \ldots + C_{\mu_\alpha} c_\mu) \\ & - \sum_{\sigma=1}^{t} (\Gamma_0 \,.\, b_{\nu+\nu_\sigma} + \Gamma_1 \,.\, b_{\nu+\nu_\sigma-1} + \ldots + \Gamma_{\nu_\sigma} b_\nu), \end{aligned}\right.$$

worin

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} m_\varkappa = \sum_{\varrho=1}^{r} n_\varrho, \quad 2\pi i \,.\, g_\lambda = \int \begin{vmatrix} \gamma \\ b \\ \beta \end{vmatrix}_\lambda d \log \tau,$$

$$2\pi i \,.\, h_\lambda = \int \begin{vmatrix} \alpha \\ a \\ \beta \end{vmatrix} d \log \tau,$$

und $\mu + \mu_\alpha = - v_\alpha, \quad \nu + \nu_\sigma = 1$ ist.

Die Beziehung A⁰) ist der Ausdruck für das allgemeine Abel'sche Theorem.

Sind alle Unstetigkeitspunkte und Nullpunkte von τ von der ersten Ordnung, so sind alle Zahlen $m_\varkappa$ und n_ϱ gleich 1. Bezeichnet dann $\beta_1 \ldots \beta_\varkappa \ldots \beta_q$ das System der Nullpunkte, $\gamma_1 \ldots \gamma_\varkappa \ldots \gamma_q$ das System der Unstetigkeitspunkte von τ, so nimmt die linke Seite von A⁰) die Form $\sum_{\varkappa=1}^{q} [\omega(\beta_\varkappa) - \omega(\gamma_\varkappa)]$, wofür auch geschrieben werden kann:

$$\sum_{\varkappa=1}^{q} \int_{\gamma_\varkappa}^{\beta_\varkappa} d\omega.$$

Die Beziehung A⁰) geht dann über in:

$$\text{A}_1^0) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{q} \int_{\gamma_\varkappa}^{\beta_\varkappa} d\omega$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{q} (h_\lambda A_\lambda - g_\lambda \,.\, B_\lambda)$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{s} v_\alpha \left(C_0\, c_{\mu+\mu_\alpha} + C_1\, c_{\mu+\mu_\alpha-1} + \ldots + C_{\mu_\alpha}\, c_\mu\right)$$

$$- \sum_{\sigma=1}^{t} \left(\Gamma_0 \,.\, b_{\nu+\nu_\sigma} + \Gamma_1 \,.\, b_{\nu+\nu_\sigma-1} + \ldots + \Gamma_{\nu_\sigma} \,.\, b_\nu\right).$$

Bezüglich der Konstanten g_λ, h_λ $(\lambda = 1, \ldots p)$ auf der rechten Seite von A_1^0 läßt sich allgemein Folgendes aussagen.

Betrachtet man an Stelle der Funktion τ mit den Nullpunkten $\beta_1 \ldots \beta_q$ und den Unstetigkeitspunkten $\gamma_1 \ldots \gamma_q$ die Funktion

$$\tau_1 = \frac{\tau - k}{\tau - k_1},$$

wo k und k_1 konstante Gröfsen sind, so sind die Nullpunkte von τ_1 die q Punkte, in denen $\tau = k$, und die Unstetigkeitspunkte die q Punkte, in denen $\tau = k_1$ wird. Bezeichnet man diese Punkte wieder mit $\beta_1 \ldots \beta_q$ und $\gamma_1 \ldots \gamma_q$, so ändern sich diese Punkte stetig, wenn k und k_1 sich stetig ändern. Setzt man zunächst $k = k_1$, so fallen die Punkte $\beta_\varkappa$ mit den entsprechenden Punkten $\gamma_\varkappa$ zusammen, und die g_λ, h_λ werden $= 0$, wenn man in A_1^0) die Integrationswege von $\gamma_\varkappa$ nach $\beta_\varkappa$ auf Null reduziert. Läfst man von da an k sich stetig ändern, so ändern auch die Punkte $\beta_\varkappa$ stetig ihre Lage, und die Zahlen g_λ, h_λ bilden so lange $= 0$, bis einer der Punkte $\beta_\varkappa$ einen Querschnitt überschreitet, wenn nur dabei als Integrationswege die simultanen Wege gewählt werden, auf denen die Punkte $\beta_\varkappa$ bei der Änderung von k vorrücken.

Die ganzen Zahlen g_λ, h_λ sind also unabhängig von ω und hängen im allgemeinen ab von der Natur der Funktion τ und von der Lage der Querschnitte. Legt man in A_1^0) den Integrationswegen die Beschränkung auf, die Querschnitte a_λ, b_λ $(\lambda = 1 \ldots p)$ nicht zu überschreiten, so sind alle g_λ, h_λ gleich Null. Läfst man die Integrationswege beliebig in T' verlaufen, ohne Rücksicht auf die Querschnitte, so kann man den Zahlen g_λ, h_λ beliebige ganze Zahlenwerte erteilen.

Aus A^0) resp. A_1^0) lassen sich durch Spezialisierung von ω mehrere Beziehungen spezieller Natur ableiten.

1⁰) Es sei ω ein Normalintegral I. Gattung u_i. Dann ist:

$$A_\lambda = \binom{\lambda}{i} \pi i, \qquad B_\lambda = a_{i\lambda},$$

$$-\mu = v_a - 1, \qquad \nu = 2,$$

und die Beziehung A^0) resp. A_1^0) geht über in:

$$\text{B}^0.)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{k} m_\varkappa \,.\, u_i(\beta_\varkappa) - \sum_{\varrho=1}^{r} n_\varrho \,.\, u_i(\gamma_\varrho)$$

$$-\pi i \,.\, h_i - \sum_{\lambda=1}^{p} g_\lambda \,.\, a_{i\lambda}, \qquad (i = 1, 2 \ldots p),$$

resp.

$$\text{B}_1^0.)\quad \sum_{\varkappa=1}^{q} \int_{\gamma_\varkappa}^{\beta_\varkappa} du_i = \pi i \,.\, h_i - \sum_{\lambda=1}^{p} g_\lambda \,.\, a_{i\lambda}, \qquad (i = 1, 2 \ldots p),$$

Legt man den Integrationswegen in $\text{B}_1^0.)$ die Beschränkung auf, die Querschnitte a_λ, b_λ $(\lambda = 1 \ldots p)$ nicht zu überschreiten, so geht $\text{B}_1^0.)$ über in die einfachere Gleichung:

$$\text{B}_2^0.)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{q} \int_{\gamma_\varkappa}^{\beta_\varkappa} du_i = 0, \qquad \text{für } i = 1, 2 \ldots p.$$

II⁰.) Es sei ω ein Normalintegral III. Gattung $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. — In diesem Falle wird der Integrand $\dfrac{d\,\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{dz}$ nur unstetig in ε_1 und ε_2, und es ist

$$\text{in } \varepsilon_1:\ \frac{d\,\tilde{\omega}}{dz} = \frac{1}{z - \zeta_1} + \text{f. c.},$$

$$\text{in } \varepsilon_2:\ \frac{d\,\tilde{\omega}}{dz} = -\frac{1}{z - \zeta_2} + \text{f. c.},$$

wo ζ_1, ζ_2 die Werte von z in ε_1 und ε_2 bezeichnen. Es ist daher:

für ε_1: $v_1 = 1$, $\mu = -1$, d. h. $\mu_1 = 0$, $c_\mu = 1$,

für ε_2: $v_2 = 1$, $\mu = -1$, d. h. $\mu_2 = 0$, $c_\mu = -1$.

Ferner ist: $\nu = 2$, $A_\lambda = 0$, $B_\lambda = 2\,[u_\lambda(\varepsilon_1) - u_\lambda(\varepsilon_2)]$. — Die Beziehungen $\text{A}^0.)$ resp. $\text{A}_1^0.)$ gehen somit, wenn man aufserdem berücksichtigt, dafs

$$C_{01} = \log \tau(\varepsilon_1), \quad C_{02} = \log \tau(\varepsilon_2)$$

ist, über in:

$$\mathrm{C}^0) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{k} m_\varkappa \,.\, \tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)_{\beta_\varkappa} - \sum_{\varrho=1}^{r} n_\varrho \,.\, \tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)_{\gamma_\varrho}$$

$$= -2 \sum_{\lambda=1}^{p} g_\lambda \left[u_\lambda(\varepsilon_1) - u_\lambda(\varepsilon_2)\right] + \log \frac{\tau(\varepsilon_1)}{\tau(\varepsilon_2)},$$

resp.

$$\mathrm{C}_1^0) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{q} \int_{\gamma_\varkappa}^{\beta_\varkappa} d\,\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

$$= -2 \,.\, \sum_{\lambda=1}^{p} g_\lambda \left[u_\lambda(\varepsilon_1) - u_\lambda(\varepsilon_2)\right] + \log \frac{\tau(\varepsilon_1)}{\tau(\varepsilon_2)}.$$

Führt man an Stelle der Funktion τ die Funktion

$$\frac{\tau - k}{\tau - k_1}$$

ein, und bezeichnet man die Null- und Unstetigkeitspunkte dieser Funktion wieder mit $\beta_1 \ldots \beta_q$ resp. $\gamma_1 \ldots \gamma_q$, so geht C_1^0) über in:

$$\mathrm{C}_2^0) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{q} \int_{\gamma_\varkappa}^{\beta_\varkappa} d\,\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -2 \sum_{\lambda=1}^{p} g_\lambda \left[u_\lambda(\varepsilon_1) - u_\lambda(\varepsilon_2)\right]$$

$$+ \log \cdot \left[\frac{\tau(\varepsilon_1) - k}{\tau(\varepsilon_1) - k_1} \cdot \frac{\tau(\varepsilon_2) - k_1}{\tau(\varepsilon_2) - k}\right].$$

Legt man hierin den Integrationswegen links die Beschränkung auf, die Querschnitte b_λ nicht zu überschreiten, so ergiebt sich

$$\mathrm{C}_3^0) \quad \sum_{\varkappa=1}^{q} \int_{\gamma_\varkappa}^{\beta_\varkappa} d\,\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \log \frac{\tau(\varepsilon_1) - \tau(\beta)}{\tau(\varepsilon_1) - \tau(\gamma)} \cdot \frac{\tau(\varepsilon_2) - \tau(\gamma)}{\tau(\varepsilon_2) - \tau(\beta)},$$

wo $\tau(\beta) = k$, $\tau(\gamma) = k_1$ ist.

Sind speziell die Punkte $\gamma_\varkappa$ die Unstetigkeitspunkte von τ, so erhält man:

$$\mathrm{C}_4^0) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{q} \int_{\gamma_\varkappa}^{\beta_\varkappa} d\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \log \frac{\tau(\varepsilon_1) - \tau(\beta)}{\tau(\varepsilon_2) - \tau(\beta)},$$

und schliefslich, bei Anwendung des Vertauschungssatzes von Argument und Parameter:

$$\text{D}_2^0) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{q} \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} d\tilde{\omega}(\beta_\varkappa, \gamma_\varkappa) = \log \frac{\tau(\varepsilon_1) - \tau(\beta)}{\tau(\varepsilon_2) - \tau(\beta)}.$$

In dieser letztern Form wird später das Abel'sche Theorem für Normalintegrale III. Gattung zur Lösung des Umkehrproblems benuzt werden.

Nimmt man in A_2^0) resp. $\text{A}_{1\,2}^{\;0}$) für ω ein Normalintegral II. Gattung, so erhält man ebenfalls eine Beziehung spezieller Natur, das Abel'sche Theorem für Integrale II. Gattung. Da diese Beziehung an Bedeutung hinter den Beziehungen B_2^0), C_2^0) und D_2^0) weit zurücksteht und auch im folgenden nicht zur Anwendung kommt, leiten wir dieselbe hier nicht ab und verweisen für sie etwa auf Stahl, Abel'sche Funktionen, § 19.

Kapitel IV.

Funktionen und Punktsysteme der Klasse.

§ 27. Umkehrung des Abel'schen Theorems für Integrale I. Gattung.

Im vorigen Paragraphen ist nachgewiesen worden, dafs wenn eine Funktion τ der Klasse in den Punkten $\beta_1 \dots \beta_\varkappa \dots \beta_k$ Null wird zu den Ordnungen $m_1 \dots m_\varkappa \dots m_k$, und ∞ zu den Ordnungen $n_1 \dots n_\varrho \dots n_r$ in den Punkten $\gamma_1 \dots \gamma_\varrho \dots \gamma_r$, wobei $\Sigma m_\varkappa = \Sigma n_\varrho = q$ die Ordnung von τ bezeichnet, die p Beziehungen:

$$1^0) \quad \sum_{\varkappa=1}^{k} m_\varkappa \,.\, u_i(\beta_\varkappa) - \sum_{\varrho=1}^{r} n_\varrho \,.\, u_i(\gamma_\varrho) = \pi i \,.\, h_i - \sum_{\lambda=1}^{p} g_\lambda \,.\, a_{i\lambda}$$

$$(i = 1, 2 \dots p)$$

bestehen, wo u_i dasjenige Normalintegral I. Gattung bedeutet, das an a_λ, b_λ die Periodizitätsmoduln $\binom{\lambda}{i}\pi i$, $a_{i\lambda}$ besitzt, und g_λ, h_λ ganze Zahlen sind, die definiert sind durch die Integrale:

$$2\pi i \,.\, g_\lambda = \int \left|\begin{matrix}\gamma\\ b\\ \beta\end{matrix}\right|_\lambda d\log\tau, \qquad 2\pi i \,.\, h_\lambda = \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ a\\ \beta\end{matrix}\right|_\lambda d\log\tau.$$

Dieser spezielle, im allgemeinen Abel'schen Theorem enthaltene Satz ist vor allen andern wichtig wegen seiner Umkehrbarkeit. Es gilt nämlich der

Satz 1°) Sind für zwei Punktsysteme

$$\beta_1 \dots \beta_\varkappa \dots \beta_k,$$
$$\gamma_1 \dots \gamma_\varrho \dots \gamma_r;$$

von denen das erste den Punkt $\beta_\varkappa$ allgemein $m_\varkappa$-mal, das zweite den Punkt γ_ϱ allgemein n_ϱ-mal enthält, wobei $\Sigma m_\varkappa = \Sigma n_\varrho$ ist, die p Beziehungen 1°) erfüllt, worin g_λ, h_λ ganze Zahlen bedeuten, so giebt es eine algebraische Funktion τ der Klasse von der Ordnung $q = \Sigma m_\varkappa = \Sigma n_\varrho$, die in den Punkten $\beta_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \dots k)$ gleich $0^{m_\varkappa}$ und in den Punkten γ_ϱ $(\varrho = 1, \dots r)$ gleich ∞^{n_ϱ} wird.

Beweis: Wir bilden die Exponentialgröfse

$$\tau = e^J, \tag{2°)}$$

wo

$$J = \sum_{\varkappa=1}^{k} m_\varkappa \,.\, \tilde{\omega}(\beta_\varkappa, \gamma_r) - \sum_{\varrho=1}^{r-1} n_\varrho \,.\, \tilde{\omega}(\gamma_\varrho, \gamma_r) \tag{3°)}$$
$$+ 2\sum_{\lambda=1}^{p} g_\lambda \,.\, u_\lambda + \text{constans}$$

ist, und untersuchen das Verhalten von τ in T'.

Nullpunkte und Unstetigkeitspunkte von τ sind nur dort zu erwarten, wo der Exponent J unendlich wird, d. h. in den Punkten $\beta_\varkappa$ und γ_ϱ.

1°) in $\beta_\varkappa\,(z = z_\varkappa)$ wird nur ein Integral $\tilde{\omega}$ unstetig, und zwar ist dort:

$$\tilde{\omega}(\beta_\varkappa, \gamma_\varrho) = \log(z - z_\varkappa) + \text{f. c.},$$

und daher:

$$J = m_\varkappa \,.\, \log(z - z_\varkappa) + \text{f. c.},$$
$$\tau = (z - z_\varkappa)^{m_\varkappa} \,.\, e^{\text{f. c.}},$$

d. h. τ verschwindet in $\beta_1 \dots \beta_\varkappa \dots \beta_k$ zu den Ordnungen $m_1 \dots m_\varkappa \dots m_k$.

2°) in $\gamma_\varrho\,(z = z_\varrho)$ ist:

$$\tilde{\omega}(\gamma_\varrho, \gamma_r) = \log(z - z_\varrho) + \text{f. c.}, \quad (\varrho = 1, 2, \; r - 1)$$

und daher

$$J = - n_\varrho \,.\, \log (z - z_\varrho) + \text{f. c.},$$

$$\tau = (z - z_\varrho)^{-n_\varrho} \,.\, e^{\text{f. c.}},$$

d. h. τ wird in den Punkten $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_{r-1}$ gleich ∞ zu den Ordnungen $n_1 \ldots n_\varrho \ldots n_{r-1}$.

3º) im Punkte $\gamma_r \, (z = z_r)$ ist:

$$J = - \log (z - z_r) \,.\, \sum_{\varkappa=1}^{k} m_\varkappa + \log (z - z_r) \,.\, \sum_{\varrho=1}^{r-1} n_\varrho$$

$$= - \log (z - z_r) \,.\, \left[\sum_{\varkappa=1}^{k} m_\varkappa - \sum_{\varrho=1}^{r-1} n_\varrho \right] = - n_r \,.\, \log (z - z_r),$$

und daher:

$$\tau = (z - z_r)^{-n_r} \,.\, e^{\text{f. c.}},$$

d. h. τ wird in γ_r unendlich zur Ordnung n_r.

Ein Teil unserer Behauptung ist hiermit als richtig erwiesen. Es bleibt nur noch das Verhalten von τ an den Querschnitten von T' zu untersuchen.

J ist eindeutig in der einfach zusammenhängenden Fläche T'', die man erhält, wenn man in T' vom gemeinsamen Kreuzungspunkte η der Schnitte $c_1 \ldots c_p$ aus Schnitte $l_1 \ldots l_\varkappa \ldots l_k, \, l'_1 \ldots l'_\varrho \ldots l'_r$ nach den logarithmischen Unstetigkeitspunkten anlegt. In T'' ist nun:

1º) an $a_i \, (i = 1 \ldots p)$: $\overset{+}{\tilde{\omega}} = \overset{-}{\tilde{\omega}}$,

$$\overset{+}{J} - \overset{-}{J} = 2 g_i \,.\, \pi i,$$

und daher, da g_i eine ganze Zahl sein soll: $\overset{+}{\tau} = \overset{-}{\tau}$.

2º) an $b_i \, (i = 1, \ldots p)$:

$$\overset{+}{\tilde{\omega}} (\beta_\varkappa, \gamma_r) - \overset{-}{\tilde{\omega}} (\beta_\varkappa, \gamma_r) = 2 \left[u_i (\beta_\varkappa) - u_i (\gamma_r) \right],$$

$$\overset{+}{\tilde{\omega}} (\gamma_\varrho, \gamma_r) - \overset{-}{\tilde{\omega}} (\gamma_\varrho, \gamma_r) = 2 \,.\, \left[u_i (\gamma_\varrho) - u_i (\gamma_r) \right],$$

$$\overset{+}{u}_\lambda - \overset{-}{u}_\lambda = a_{i\lambda},$$

und daher:

$$\overset{+}{J} - \overset{-}{J} = 2 \sum_{\varkappa=1}^{k} m_\varkappa \left[u_i(\beta_\varkappa) - u_i(\gamma_r)\right]$$

$$- 2 \sum_{\varrho=1}^{r-1} n_\varrho \left[u_i(\gamma_\varrho) - u_i(\gamma_r)\right] + 2 \sum_{\lambda=1}^{p} g_\lambda\, a_{i\lambda}$$

$$= 2 \sum_{\varkappa=1}^{k} m_\varkappa . u_i(\beta_\varkappa) - 2 \sum_{\varrho=1}^{r} n_\varrho . u_i(\gamma_\varrho) + 2 \sum_{\lambda=1}^{p} g_\lambda\, a_{i\lambda}$$

$$= 2\pi i . h_i,$$

d. h. $$\overset{+}{\tau} = \overset{-}{\tau}.$$

3º) an $l_\varkappa$: $\overset{+}{J} - \overset{-}{J} = - m_\varkappa . 2\pi i$, d. h. $\overset{+}{\tau} = \overset{-}{\tau}$,

„ $l'_\varrho\ (\varrho = 1, \ldots r)$: $\overset{+}{J} - \overset{-}{J} = - n_\varrho . 2\pi i$, d. h. $\overset{+}{\tau} = \overset{-}{\tau}$.

Die Funktion τ ist somit in T eindeutig; ihre Null- und Unstetigkeitspunkte sind die in endlicher Anzahl vorhandenen Punkte $\beta_\varkappa$ und γ_ϱ, und die Ordnung des Null- und Unstetigwerdens von τ in diesen Punkten ist eine endliche. τ ist daher eine Funktion der Klasse mit den im Satz Iº) ausgesprochenen Eigenschaften.

Ein Punktsystem, in dessen einzelnen Punkten eine Funktion τ der Klasse zur ersten oder zu einer höheren Ordnung Null wird, nennen wir mit Christoffel ein Punktsystem der Klasse. Dieselbe Bezeichnung benutzen wir auch für das System der Unstetigkeitspunkte von τ, und nennen das System der Nullpunkte und das der Unstetigkeitspunkte von τ zusammengehörige Punktsysteme der Klasse. — Mit Anwendung dieser Ausdrucksweise können wir nunmehr den fundamentalen Satz aussprechen:

Satz IIº) Die p Beziehungen:

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} m_\varkappa . u_i(\beta_\varkappa) - \sum_{\varrho=1}^{r} n_\varrho . u_i(\gamma_\varrho) = \pi i . h_i - \sum_{\lambda=1}^{p} g_\lambda\, a_{i\lambda},$$

$$(i = 1, 2, \ldots p)$$

worin $\sum_{\varkappa=1}^{k} m_\varkappa = \sum_{\varrho=1}^{r} n_\varrho = q$ ist, und die Gröfsen $m_\varkappa, n_\varrho, g_\lambda, h_i$ ganze Zahlen bedeuten, sind die

notwendigen und ausreichenden Bedingungen dafür, daſs die Punktsysteme $\beta_1 \ldots \beta_\varkappa \ldots \beta_k$ und $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_r$, von denen das erste den Punkt $\beta_\varkappa$ allgemein $m_\varkappa$-mal, das zweite den Punkt γ_ϱ allgemein n_ϱ-mal enthält, zusammengehörige Punktsysteme der Klasse sind.

Denkt man sich das Abel'sche Theorem für Normalintegrale I. Gattung u in der Form:

$$4^0)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{q} u(\beta_\varkappa) \equiv \sum_{\varkappa=1}^{q} u(\gamma_\varkappa)$$

geschrieben, wo das Kongruenzzeichen $\equiv$ andeuten soll, daſs die linke Seite gleich der rechten ist bis auf ein System von Simultanperioden von u, so läſst sich der vorige Satz auch aussprechen, wie folgt:

Satz III^0) Das Punktsystem $\beta_1 \ldots \beta_\varkappa \ldots \beta_q$ ist dann und nur dann ein Punktsystem der Klasse, wenn die Kongruenz 4^0) durch ein mit $\beta_1 \ldots \beta_q$ nicht identisches Punktsystem $\gamma_1 \ldots \gamma_q$ erfüllt werden kann.

Wo es nicht auf Systeme von Simultanperioden von u ankommt, läſst sich also die Summe $\sum_{\varkappa=1}^{q} u(\beta_\varkappa)$ ersetzen durch $\sum_{\varkappa=1}^{q} u(\gamma_\varkappa)$. In diesem Sinne nennt Herr Rost (Theorie der Riemann'schen ϑ-Funktion, pag. 24^0) ein Punktsystem $\beta_1 \ldots \beta_q$, das den Bedingungen des vorigen Satzes genügt, ein ersetzbares Punktsystem.*)

Die Sätze II^0) und III^0) dieses Paragraphen liefern ein erstes Kriterium für Punktsysteme der Klasse.

*) Trotz des in dieser Bezeichnung liegenden Hinweises auf die im obigen Satze ausgesprochene grundlegende Eigenschaft des Punktsystems $\beta_1 \ldots \beta_q$, werden wir im Folgenden der von Christoffel benutzten Bezeichnung „Punktsystem der Klasse" den Vorzug geben, da sie sich in natürlicher Weise an die allgemein übliche Bezeichnung „Funktion der Klasse" anlehnt.

§ 28. Darstellung der Funktionen der Klasse; zweites Kriterium für Punktsysteme der Klasse.

Das Punktsystem $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_r$, das allgemein den Punkt γ_ϱ n_ϱ-mal enthält, sei das System der Unstetigkeitspunkte einer Funktion τ der Klasse, und zwar sei:

1º) in γ_ϱ $(z = \zeta_\varrho, s = \sigma_\varrho)$:

$$\tau = \frac{R_\varrho^{(1)}}{z - \zeta_\varrho} + \frac{R_\varrho^{(2)}}{(z - \zeta_\varrho)^2} + \ldots + \frac{R_\varrho^{(n_\varrho)}}{(z - \zeta_\varrho)^{n_\varrho}} + f.c. \ldots$$

Bezeichnet dann $\Psi(o, \varepsilon)$ den Integranden $\frac{\Phi(o, \varepsilon)}{F'(s, z)}$ in Eº), § 22, so ist das Produkt:

2º) $$V = \tau \, . \, \Psi(o, \varepsilon)$$

eine Funktion der Klasse, deren Residuen sich leicht bestimmen lassen. Es ist nämlich:

1º) in ε $(z = \zeta)$:

$$\lim (z - \zeta) \, . \, \Psi(o, \varepsilon) = 1,$$

$$\lim \tau(o) = \tau(\varepsilon),$$

und daher $$V = \frac{\tau(\varepsilon)}{z - \zeta} + \text{f. c.},$$

d. h. $$\text{Res}(\varepsilon) = \tau(\varepsilon).$$

2º) in γ_ϱ $(z = \zeta_\varrho, \; s = \sigma_\varrho)$:

$$\Psi = \Psi(\gamma_\varrho, \varepsilon) + (z - \zeta_\varrho) \, . \, \Psi'(\gamma_\varrho, \varepsilon)$$

$$+ \frac{(z - \zeta_\varrho)^2}{2!} \Psi''(\gamma_\varrho, \varepsilon) + \ldots + \frac{(z - \zeta_\varrho)^{n_\varrho - 1}}{(n_\varrho - 1)!} \Psi^{n_\varrho - 1}(\gamma_\varrho, \varepsilon) + \text{f. c.},$$

und daher:

$$\text{Res}(\gamma_\varrho) = R_\varrho^{(1)} . \, \Psi(\gamma_\varrho, \varepsilon) + R_\varrho^{(2)} . \, \Psi'(\gamma_\varrho, \varepsilon)$$

$$+ \frac{R_\varrho^{(3)}}{2!} \Psi''(\gamma_\varrho, \varepsilon) + \ldots + \frac{R_\varrho^{(n)}}{(n_\varrho - 1)!} \Psi^{(n_\varrho - 1)}(\gamma_\varrho, \varepsilon).$$

Im Endlichen kommen weitere Residuen von V nicht vor. — Im Unendlichen ist:

3°) In $\infty_\varkappa$:

$$\lim z\,.\,\tau\,.\,\Psi(o,\varepsilon) = \frac{1}{n}\cdot\lim\tau = \frac{1}{n}\cdot\tau(\infty_\varkappa),$$

und daher:

$$\operatorname{Res}(\infty_\varkappa) = -\frac{1}{n}\cdot\tau(\infty_\varkappa), \qquad (\varkappa = 1, 2 \ldots n).$$

Berücksichtigt man nun, dafs die Summe aller Residuen von V gleich Null ist, so erhält man die Beziehung:

$$\tau(\varepsilon) + \sum_{\varrho=1}^{r}\Big[R_\varrho^{(1)}.\,\Psi(\gamma_\varrho,\varepsilon) + \ldots$$

$$+ \frac{R_\varrho^{(n_\varrho)}}{(n_\varrho - 1)!}\,\Psi^{(n_\varrho - 1)}(\gamma_\varrho,\varepsilon)\Big] - \frac{1}{n}\cdot\sum_{\varkappa=1}\tau(\infty_\varkappa) = 0,$$

oder, da nach Früherem der Punkt ε beliebig angenommen werden kann:

I°) $$\tau(o) = C - \sum_{\varrho=1}^{r}\Big[R_\varrho^{(1)}.\,\Psi(\gamma_\varrho,o)$$

$$+ \frac{R_\varrho^{(2)}}{1!}\,\Psi'(\gamma_\varrho,o) + \frac{R_\varrho^{(3)}}{2!}\,\Psi''(\gamma_\varrho,o) + \ldots + \frac{R_\varrho^{(n_\varrho)}}{(n_\varrho - 1)!}\,\Psi^{(n_\varrho-1)}(\gamma_\varrho,o)\Big],$$

wo $$C = \frac{1}{n}\cdot\sum_{\varkappa=1}^{n}\tau(\infty_\varkappa),$$

und allgemein $\Psi^{(k)}(\gamma_\varrho,o) = \dfrac{\partial^k}{\partial\zeta_\varrho^k}\left(\dfrac{\Phi(\gamma_\varrho,o)}{F'(\sigma_\varrho,\zeta_\varrho)}\right)$ ist.

Diese Formel liefert, falls die Unstetigkeitspunkte $\gamma_1\ldots\gamma_\varrho\ldots\gamma_r$ bekannt sind, einen algebraischen Ausdruck für τ. Vorausgesetzt ist jedoch bei der vorhergehenden Ableitung, dafs alle Punkte $\gamma_1\ldots\gamma_2$ im Endlichen liegen.

Eine andere Darstellungsform für τ ergiebt sich auf folgende Weise. Es sei wieder:

in $\gamma_\varrho(z=\zeta_\varrho)$: $\quad \tau = \displaystyle\sum_{\sigma=1}^{n_\varrho}\frac{R_\varrho^{(\sigma)}}{(z-\zeta_\varrho)^\sigma} + \text{f. c.}, \quad (\varrho = 1, 2 \ldots \varrho).$

Nimmt man hierzu den allgemeinen Integranden I. Gattung w', der in der Umgebung γ_ϱ die Entwickelung:

$$3^0) \quad w' = w'(\gamma_\varrho) + \frac{z - \zeta_\varrho}{1!} w''(\gamma_\varrho) + \frac{(z-\zeta_\varrho)^2}{2!} w'''(\gamma_\varrho) + \cdots$$
$$+ \frac{(z-\zeta_\varrho)^{n_\varrho - 1}}{(n_\varrho - 1)!} w^{(n_\varrho)}(\gamma_\varrho) + \cdots$$

besitzt, so erhält man, wenn man beachtet, dafs die Funktion der Klasse

$$4^0) \qquad \tau \,.\, w'$$

die Residuensumme Null hat, die Beziehung:

$$\text{II}^0) \quad \sum_{\varrho=1}^{r} \Big[R_\varrho^{(1)} w'(\gamma_\varrho) + \frac{R_\varrho^{(2)}}{1!} w''(\gamma_\varrho) + \frac{R_\varrho^{(3)}}{2!} w^{(3)}(\gamma_\varrho) + \cdots$$
$$+ \frac{R_\varrho^{(n_\varrho)}}{(n_\varrho - 1)!} w^{(n_\varrho)}(\gamma_\varrho) \Big] = 0.$$

Ersetzt man hierin w' der Reihe nach durch die p Normalintegranden I. Gattung $u'_1 \ldots u'_\varkappa \ldots u'_p$, so ergeben sich die p Relationen:

$$\text{II}_\varkappa^0) \qquad \sum_{\varrho=1}^{r} \Big[R_\varrho^{(1)} \cdot u'_\varkappa(\gamma_\varrho)$$
$$+ \frac{R_\varrho^{(2)}}{1!} u''_\varkappa(\gamma_\varrho) + \cdots + \frac{R_\varrho^{(n_\varrho)}}{(n_\varrho - 1)!} u_\varkappa^{(n_\varrho)}(\gamma_\varrho) \Big] = 0, \quad (\varkappa = 1, 2 \ldots p).$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen läfst sich der Darstellungsformel für τ eine andere Gestalt geben. — Wir haben früher (§ 23, 9^0) für das definitiv normierte Integral II. Gattung, das in einem Punkte γ ($z = \zeta$, $s = \sigma$) zur ν^{ten} Ordnung algebraisch unstetig wird, den Ausdruck abgeleitet:

$$t^{(\nu)}(o, \gamma) = \frac{1}{\pi i} \sum_{\lambda=1}^{p} A_\lambda(o) \,.\, u_\lambda^{(\nu)}(\gamma) - \Psi^{(\nu-1)}(\gamma, o),$$

wo $$\Psi^{(\nu-1)}(\gamma, o) = \frac{d^{\nu-1}}{d\zeta^{\nu-1}} \left(\frac{\Phi(\gamma, o)}{F'(\sigma, \zeta)} \right) \text{ ist. —}$$

Hieraus folgt:

$$\sum_{\varrho=1}^{r}\Big[R_\varrho^{(1)}.\,t^{(1)}(o,\gamma_\varrho)+\frac{R_\varrho^{(2)}}{1!}\,t^{(2)}(o,\gamma_\varrho)+\frac{R_\varrho^{(2)}}{2!}\,t^{(3)}(o,\gamma_\varrho)+\cdots$$

$$+\frac{R_\varrho^{(n_\varrho)}}{(n_\varrho-1)!}\,t^{(n_\varrho)}(o,\gamma_\varrho)\Big]$$

$$=\frac{1}{\pi i}\sum_{\lambda=1}^{p}A_\lambda(o).\Big[\sum_{\varrho=1}^{r}\Big\{R_\varrho^{(1)}.\,u_\lambda'(\gamma_\varrho)+\frac{R_\varrho^{(2)}}{1!}\,u_\lambda''(\gamma_\varrho)+\cdots$$

$$+\frac{R_\varrho^{(n_\varrho)}}{(n_\varrho-1)!}\,u_\lambda^{(n_\varrho)}(\gamma_\varrho)\Big\}\Big]$$

$$-\sum_{\varrho=1}^{r}\Big[R_\varrho^{(1)}.\,\psi(\gamma_\varrho,o)+\frac{R_\varrho^{(2)}}{1!}\,\psi'(\gamma_\varrho,o)+\cdots$$

$$+\frac{R_\varrho^{(n_\varrho)}}{(n_\varrho-1)!}\,\psi^{(n_\varrho-1)}(\gamma_\varrho,o)\Big].$$

Wendet man dies auf I$^0_\cdot$) an, und berücksichtigt dabei die Beziehungen II$^0_{a\cdot}$), so erhält man:

$$\text{III}^0_\cdot)\qquad \tau(o)=C+\sum_{\varrho=1}^{r}\Big[R_\varrho^{(1)}.\,t^{(1)}(o,\gamma_\varrho)$$

$$+\frac{R_\varrho^{(2)}}{1!}\,t^{(2)}(o,\gamma_\varrho)+\frac{R_\varrho^{(3)}}{2!}\,t^{(3)}(o,\gamma_\varrho)+\cdots+\frac{R_\varrho^{(n_\varrho)}}{(n_\varrho+1)!}\,t^{(n_\varrho)}(o,\gamma_\varrho)\Big].$$

Diese zweite wichtige Darstellungsformel drückt im Gegensatze zu I$^0_\cdot$), die Funktion τ der Klasse durch transcendente Funktionen, die definitiv normierten Integrale II. Gattung, aus, hat aber den grossen Vorzug, die Unstetigkeitspunkte von τ in vollkommen durchsichtiger Form anzugeben.

Für die Formel III$^0_\cdot$) ist es wesentlich, dafs die Gröfsen $R_\varrho^{(\sigma)}$ $(\sigma=1,2,\ldots n_\varrho)$ den Bedingungen II$^0_{a\cdot}$) genügen. Sind umgekehrt diese Bedingungen II$^0_{a\cdot}$) so erfüllt, dafs nicht alle

$R_\varrho = 0$ sind, so stellt die rechte Seite von III$^0_\cdot$) eine Funktion dar, die gemäfs 7$^0_\cdot$) § 23 im Punkte γ_ϱ die Entwickelung:

$$\frac{R_\varrho^{(1)}}{z - \zeta_\varrho} + \frac{R_\varrho^{(2)}}{(z - \zeta_\varrho)^2} + \cdots + \frac{R_\varrho^{(n_\varrho)}}{(z - \zeta_\varrho)^{n_\varrho}} + \text{f. c.}$$

besitzt und aufserdem zufolge der Periodizitätseigenschaften der $t^{(\nu)}$ an allen Querschnitten a_λ, b_λ den Periodizitätsmodul Null besitzt, also eine Funktion der Klasse ist. Dies giebt den

Satz I$^0_\cdot$) Bezeichnet

$$\gamma_1 \cdots \gamma_\varrho \cdots \gamma_r$$

ein beliebig in T angenommenes Punktsystem, das allgemein den Punkt γ_ϱ n_ϱ-mal enthält, so giebt es dann und nur dann eine Funktion τ der Klasse, deren System von Unstetigkeitspunkten aus sämtlichen Punkten γ_ϱ oder aus einem Teile derselben besteht, wenn die p Beziehungen II^0_a) durch Gröfsen $R_\varrho^{(\sigma)}$ befriedigt werden können, die nicht alle Null sind.

Dieser Satz liefert ein zweites Kriterium für Punktsysteme der Klasse.

Zum Schlusse leiten wir noch eine dritte für das Folgende wichtige Darstellungsform für τ ab.*)

Es sei wieder τ eine Funktion der Klasse mit den Unstetigkeitspunkten $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_r$ und den zugehörigen Entwickelungen:

$$\text{in } \gamma_\varrho \, (z = \zeta_\varrho): \; \tau = \sum_{\sigma=1}^{n_\varrho} \frac{R_\varrho^{(\sigma)}}{(z - \zeta_\varrho)^{n_\varrho}} + \text{f. c.}, \quad (\varrho = 1, 2 \ldots r).$$

Wir bilden die zwei Integrale der Klasse:

$$5^0_\cdot)\quad \begin{cases} J_1 = \int \tau \,.\, w' \,.\, dz \\ J_2 = \sum_{\varrho=1} [A_\varrho^{(0)} \,.\, P(o, \gamma_\varrho) + A_\varrho^{(1)} \,.\, t^{(1)}(o, \gamma_\varrho) + \cdots \\ \qquad + A_\varrho^{(n_\varrho - 1)} \,.\, t^{(n_\varrho - 1)}(o, \gamma_\varrho)], \end{cases}$$

*) Siehe Christoffel, Brioschi's Annalen, Bd. X. 1880.

wo w' ein beliebig angenommener, allgemeiner Integrand I. Gattung, $P(o, \gamma_\varrho)$ das in H⁰) § 22 definierte Integral ist, und die Gröfsen $A_\varrho^{(0)}, A_\varrho^{(1)}, \ldots A_\varrho^{(n_\varrho - 1)}$ definiert sind durch die Gleichungen:

$$6^0) \quad \left\{ \begin{aligned}
A_\varrho^{(0)} &= \sum_{\sigma=1}^{n_\varrho} \frac{1}{(\sigma-1)!} R_\varrho^{(\sigma)} . w^{(\sigma)}(\gamma_\varrho), \quad ((\sigma-1)! = 1 \text{ für } \sigma = 1.) \\
A_\varrho^{(1)} &= -\sum_{\sigma=1}^{n_\varrho - 1} \frac{1}{(\sigma-1)!} R_\varrho^{(\sigma+1)} . w^{(\sigma)}(\gamma_\varrho), \\
A_\varrho^{(2)} &= -\frac{2}{1!} \sum_{\sigma=1}^{n_\varrho - 2} \frac{1}{(\sigma-1)!} R_\varrho^{(\sigma+2)} . w^{(\sigma)}(\gamma_\varrho), \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_\varrho^{(\varkappa)} &= -\frac{\varkappa}{(\varkappa-1)!} \sum_{\sigma=1}^{n_\varrho - 1} \frac{1}{(\sigma-1)!} R_\varrho^{(\sigma+\varkappa)} . w^{(\sigma)}(\gamma_\varrho), \quad (\varkappa > 1.) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_\varrho^{(n_\varrho - 1)} &= -\frac{n_\varrho - 1}{(n_\varrho - 2)!} R_\varrho^{(n_\varrho)} . w'(\gamma_\varrho),
\end{aligned} \right.$$

in denen allgemein $w^{(\sigma)}(\gamma_\varrho)$ den Wert von $\dfrac{d^{(\sigma-1)} w'}{dz^{\sigma-1}}$ im Punkte γ_ϱ bedeutet, und untersuchen das Verhalten dieser Integrale in T'.

Es ist:

1⁰) für $z = \infty$:

$$w' = 0^2, \quad \text{d. h. } J_1 = \text{f. c.},$$

$$t^{(\nu)}(o, \gamma_\varrho) = \text{f. c.},$$

$$\frac{dP(o, \gamma_\varrho)}{dz} = \frac{1}{nz} + \text{f. c.}, \quad \sum_{\varrho=1}^{r} A_\varrho^{(0)} = 0 \text{ nach II}^0)$$

und daher $\lim \sum_{\varrho=1}^{r} A_\varrho^{(0)} . \dfrac{dP(o, \gamma_\varrho)}{dz} = 0^2$, d. h. $J_2 = \text{f. c.}$

2⁰) Im Endlichen ist aufserhalb γ_ϱ $(\varrho = 1, 2 \ldots r)$ überall $J_1 = \text{f. c.}$, $J_2 = \text{f. c.}$

In $\gamma_\varrho\ (z = \zeta_\varrho)$ ist:

$$\tau . w' = \frac{A_\varrho^{(0)}}{z - \zeta_\varrho} - \frac{A_\varrho^{(1)}}{(z - \zeta_\varrho)^2} - \frac{1!}{2} \cdot \frac{A_\varrho^{(2)}}{(z - \zeta_\varrho)^3} - \dots$$

$$- \frac{(n_\varrho - 2)!}{n_\varrho - 1} \cdot \frac{A_\varrho^{(n_\varrho - 1)}}{(z - \zeta_\varrho)^{n_\varrho}} + \text{f. c.},$$

und daher:

$$J_1 = A_\varrho^{(0)} \log (z - \zeta_\varrho) + \frac{A_\varrho^{(1)}}{(z - \zeta_\varrho)} + \frac{A_\varrho^{(2)}}{(z - \zeta_\varrho)^2} + \dots$$

$$+ \frac{(n_\varrho - 2)!}{(z - \zeta_\varrho)^{n_\varrho - 1}} A_\varrho^{(n_\varrho - 1)} + \text{f. c.},$$

$$J_2 = A_\varrho^{(0)} \log (z - \zeta_\varrho) + \frac{A_\varrho^{(1)}}{z - \zeta_\varrho} + \frac{A_\varrho^{(2)}}{(z - \zeta_\varrho)^2} + \dots$$

$$+ \frac{(n_\varrho - 2)!}{(z - \zeta_\varrho)^{n_\varrho - 1}} A_\varrho^{(n_\varrho - 1)} + \text{f. c.}$$

In $\gamma_\varrho\ (\varrho = 1, 2 \dots r)$ ist also $J_1 - J_2 = \text{f. c.}$ Die Differenz

$$J_1 - J_2$$

ist daher in T' überall stetig, also ein Integral I. Gattung:

$$J_1 - J_2 = \sum_{\lambda=1}^{p} c_\lambda . u_\lambda + \text{constans}.$$

Hieraus folgt:

$$\text{IV}^0) \qquad \tau . w' = \sum_{\lambda=1}^{p} c_\lambda . u'_\lambda + \sum_{\varrho=1}^{r} \Bigg[A_\varrho^{(0)} . \frac{dP(o, \gamma_\varrho)}{dz}$$

$$+ A_\varrho^{(1)} . \frac{dt^{(1)}_{(o, \gamma_\varrho)}}{dz} + \dots + A_\varrho^{(n_\varrho - 1)} \frac{dt^{(n_\varrho - 1)}(o, \gamma_\varrho)}{dz} \Bigg],$$

$$\text{IV}^0_a) \qquad \tau = \frac{\sum_{\lambda=1}^{p} c_\lambda . u'_\lambda}{w'} + \frac{1}{w'} . \sum_{\varrho=1}^{r} \Bigg[A_\varrho^{(0)} \frac{dP(o, \gamma_\varrho)}{dz}$$

$$+ A_\varrho^{(1)} \frac{dt^{(1)}_{(o, \gamma_\varrho)}}{dz} + \dots + A_\varrho^{(n_\varrho - 1)} \frac{dt^{(n_\varrho - 1)}(o, \gamma_\varrho)}{dz} \Bigg].$$

Diese Formel stellt die Funktion τ der Klasse dar durch einen Quotienten, dessen Divisor ein beliebiger Integrand I. Gattung ist, und dessen Dividend sich linear zusammensetzt aus einem Integranden I. Gattung, einem Integranden III. Gattung und einer Summe von Integranden II. Gattung.

Die auf der rechten Seite von IV⁰) vorkommenden konstanten Koeffizienten $c_1 \ldots c_p$ sind nicht willkürlich, sondern müssen, wenn die rechte Seite von IV_a^0) nicht noch in andern Punkten als den Unstetigkeitspunkten von τ unstetig werden soll, so bestimmt werden, dafs die rechte Seite von IV⁰) in sämtlichen Nullpunkten von w' Null wird. Da die rechte Seite von IV⁰) für $z = \infty$ ebenso wie w' gleich o^2 wird, wie aus der Bildung der Integranden II. und III. Gattung hervorgeht, so genügt es, die Koeffizienten $c_1 \ldots c_p$ so zu bestimmen, dafs die rechte Seite von IV⁰) in den im Endlichen gelegenen Nullpunkte von w' Null wird. Diese Bestimmung ist, da $\tau w'$ stets in der Form IV⁰) sich darstellen läfst, unter jedem Umständen möglich.

Der Integrand w' in IV⁰) und IV_a^0) kann beliebig gewählt werden. Denkt man sich w', wenn möglich, so bestimmt, dafs dieser Integrand in sämtlichen Punkten γ_ϱ zu derselben Ordnung verschwindet, zu der τ daselbst unstetig wird, so sind alle Gröfsen A_ϱ gleich Null, und die Formel IV_a^0 reduziert sich auf:

V⁰)
$$\tau = \frac{\sum_{\lambda=1}^{p} c_\lambda \,.\, u'_\lambda}{w'}\,.$$

Umgekehrt geht IV_a^0) nur dann in V⁰) über, wenn alle A_ϱ gleich Null sind, d. h. wenn der Integrand w' in allen Punkten γ_ϱ $(\varrho = 1 \ldots r)$ zu den Ordnungen verschwindet, zu denen dort $\tau = \infty$ wird. Dies giebt den

Satz II⁰) Läfst sich der allgemeine Integrand w' so bestimmen, dafs er, ohne identisch Null zu werden, in jedem der r Unstetigkeitspunkte γ_ϱ $(\varrho = 1, 2 \ldots r)$ einer Funktion τ der Klasse zu derselben Ordnung n_ϱ verschwindet, zu welcher τ daselbst unstetig wird, so läfst sich τ

darstellen als Quotient zweier Integranden I. Gattung, und diese Darstellung ist auch nur unter den vorigen Bedingungen möglich.

Funktionen z der Klasse, die sich in der Form V⁰) darstellen lassen, nennen wir mit Christoffel (Brioschi's Annalen, Bd. X, pag. 240–301) Funktionen I. Gattung; das System der Unstetigkeitspunkte einer solchen Funktion heiße dementsprechend ein Punktsystem I. Gattung.*) Funktionen der Klasse, die sich nicht in der Form V⁰) darstellen lassen, mögen Funktionen II. Gattung heißen, und das System der Unstetigkeitspunkte einer solchen Funktion ein Punktsystem II. Gattung.

§ 29. Drittes Kriterium für Punktsysteme der Klasse. Der Riemann-Roch'sche Satz.

Aus den an Formel IV⁰) des vorigen Paragraphen sich anschließenden Betrachtungen folgt, daß die Integranden I. Gattung für die Theorie der Punktsysteme der Klasse von grundlegender Bedeutung sind. Wir untersuchen daher diese Integranden etwas genauer.

Der allgemeine Integrand I. Gattung

$$1^0) \qquad w' = \sum_{\lambda=1}^{p} c_\lambda \,.\, u'_\lambda$$

ist eine Funktion der Klasse und besitzt daher ebensoviel Nullpunkte wie Unstetigkeitspunkte erster Ordnung (mehrfache Nullpunkte und Unstetigkeitspunkte denken wir uns hierbei in einfache aufgelöst). Da w' nur in den Verzweigungspunkten von T, und zwar in einem Verzweigungspunkte von der Ordnung μ höchstens zur Ordnung $\mu - 1$ unstetig wird, so ist die Gesamtordnung des Unstetigwerdens von w' gleich der Anzahl v der einfachen Verzweigungspunkte, die sämtlichen Verzweigungspunkten von T äquivalent ist. Diese Anzahl v ist nach 3⁰) § 15 gleich $2p + 2n - 2$.

*) Die Punktsysteme I. Gattung sind identisch mit den Spezialgruppen der Herren Brill u. Nöther, die Punktsysteme II. Gattung mit den Nichtspezialgruppen derselben Autoren.

w' besitzt also auch $2p + 2n - 2$ Nullpunkte erster Ordnung, und zwar liegen $2n$ derselben jedenfalls im Unendlichen, da jeder Integrand I. Gattung im Unendlichen in jedem der n Blätter von T mindestens $= 0^2$ wird. Die übrigen $2p - 2$ Nullpunkte von w' liegen im allgemeinen im Endlichen; wir bezeichnen sie kurz als die im Endlichen liegenden Nullpunkte von w', womit nicht ausgeschlossen sein soll, dafs für spezielle Integranden I. Gattung einige dieser $2p - 2$ Punkte oder sogar alle im Unendlichen liegen können. Bezeichnet man diese $2p - 2$ von der Wahl der Koeffizienten $c_1 \ldots c_p$ abhängigen, variabeln Nullpunkte von w' mit $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\varkappa \ldots \varepsilon_{2p-2}$ und die Verzweigungspunkte mit $\alpha_1 \ldots \alpha_u \ldots \alpha_v$, so gilt der Satz:

Satz 1°) Der allgemeine Integrand I. Gattung w' ist von der Ordnung $2p + 2n - 2$, und seine Nullpunkte und Unstetigkeitspunkte sind verbunden durch die p Beziehungen:

$$2°)\qquad \sum_{u=1}^{v} u_i(\alpha_u) = \sum_{\varkappa=1}^{2p-2} u_i(\varepsilon_\varkappa) + 2\sum_{r=1}^{n} u_i(\infty_r),\ (i = 1, 2 \ldots p)$$

des Abel'schen Theorems für Integrale I. Gattung.

Wir kehren nunmehr zu den Betrachtungen des vorigen Paragraphen zurück.

Am Schlusse des § 28 haben wir gesehen, dafs, wenn es möglich ist, den allgemeinen Integranden I. Gattung w' so zu bestimmen, dafs er, ohne identisch Null zu werden, in jedem der Unstetigkeitspunkte $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_r$ einer Funktion τ der Klasse zu derselben Ordnung verschwindet, zu der τ in diesem Punkte unendlich wird, die Funktion τ sich in sehr einfacher Weise als Quotient zweier Integranden I. Gattung darstellen läfst. Der Wichtigkeit dieses Falles wegen untersuchen wir die Möglichkeit dieser Bestimmung von w' etwas genauer.

Die Ordnung des Unendlichwerdens von τ im Punkte $\gamma_\varrho\ (\varrho = 1, \ldots r)$ sei allgemein gleich n_ϱ. Die Gleichungen,

welche ausdrücken, dafs w' in jedem Punkte γ_ϱ zur entsprechenden Ordnung n_ϱ verschwindet, lauten dann:

$$3^0) \quad w'(\gamma_\varrho) = 0,\ w''(\gamma_\varrho) = 0, \ldots w^{(n_\varrho)}(\gamma_\varrho) = 0, (\varrho = 1, 2 \ldots r).$$

Diese Gleichungen, deren Gesamtzahl $= \sum_{\varrho=1}^{r} n_\varrho = q$ ist, sind linear und homogen in den zu bestimmenden Koeffizienten $c_1 \ldots c_p$ des allgemeinen Integranden $w' = \sum_{\lambda=1}^{p} c_\lambda u_\lambda$ und können daher niemals einen Widerspruch enthalten, da es stets ein System von Lösungen giebt, das diese Gleichungen befriedigt, nämlich das Lösungssystem $c_1 = c_2 = \ldots = c_p = 0$. Die Frage, die hier zu untersuchen ist, lautet jedoch: unter welchen Umständen ist es möglich, sämtliche Gleichungen $3^0)$ durch Gröfsen $c_1 \ldots c_p$ zu befriedigen, die nicht alle gleich Null sind? Die Beantwortung dieser Frage gründet sich auf die Betrachtung der Beziehung II^0) des vorigen Paragraphen.

In dieser Relation II^0)

$$\sum_{\varrho=1}^{r} \left[R_\varrho^{(1)} \cdot w'(\gamma_\varrho) + \frac{R_\varrho^{(2)}}{1!} w''(\gamma_\varrho) + \frac{R_\varrho^{(3)}}{2!} w^{(3)}(\gamma_\varrho) + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{R_\varrho^{(n_\varrho)}}{(n_\varrho - 1)!} w^{(n_\varrho)}(\gamma_\varrho) \right] = 0$$

sind die Gröfsen $R_\varrho^{(n_\varrho)}$ $(\varrho = 1 \ldots r)$, wenn wir voraussetzen, dafs τ in γ_ϱ wirklich zur Ordnung n_ϱ unstetig wird, alle von Null verschieden. Denken wir uns daher die Koeffizienten $c_1 \ldots c_p$ so bestimmt, dafs die Gleichungen:

$$w'(\gamma_1) = 0, \ldots w^{(n_1)}(\gamma_1) = 0, \ldots w'(\gamma_r) = 0, \ldots w^{(n_r - 1)}(\gamma_r) = 0$$

erfüllt sind, so folgt aus II^0) unmittelbar, dafs auch die Gleichung:

$$\frac{R_r^{(n_r)}}{(n_r - 1)!} w^{(n_r)}(\gamma_r) = 0,$$

oder, da $R_r^{(n_r)}$ von Null verschieden ist, die Gleichung:

$$w^{(n_r)}(\gamma_r) = 0$$

erfüllt ist. —

Dies giebt den

Satz II⁰) Die $q = \sum_{\varrho=1}^{r} n_\varrho$ Gleichungen 3⁰), die ausdrücken, dafs der allgemeine Integrand I. Gattung

$$w' = \sum_{\lambda=1}^{p} c_\lambda u'_\lambda$$

in jedem Punkte γ_ϱ des Systems $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_r$ der Unstetigkeitspunkte einer Funktion τ der Klasse zu derselben Ordnung n_ϱ verschwindet, zu der τ daselbst unstetig wird, enthalten mindestens **eine** überzählige Gleichung.*)

Dieser Satz läfst sich umkehren.

Angenommen, das System 3⁰) enthalte die $\varkappa\,(\geqq 1)$ überzähligen Gleichungen:

$$4^0)\quad w^{(\mu_1)}(\gamma_{\nu_1}) = 0, \ldots, w^{(\mu_\alpha)}(\gamma_{\nu_\alpha}) = 0, \ldots w^{(\mu_\varkappa)}(\gamma_{\nu_\varkappa}) = 0,$$

wo $\mu_1 \ldots \mu_\alpha \ldots \mu_\varkappa$ Zahlen aus den r Reihen $1, 2 \ldots n_\varrho$ $(\varrho = 1 \ldots r)$, und $\gamma_{\nu_1} \ldots \gamma_{\nu_\alpha} \ldots \gamma_{\nu_\varkappa}$ Punkte aus dem System $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_r$ bedeuten, von denen auch zwei oder mehr identisch sein können. Die übrigen $q - \varkappa$ Gleichungen des Systems 3⁰)

$$5^0)\quad w^{(\mu_{\varkappa+1})}(\gamma_{\pi_1}) = 0, \ldots w^{(\mu_{\varkappa+\beta})}(\gamma_{\pi_\beta}) = 0, \ldots w^{(\mu_q)}(\gamma_{\pi_{q-\varkappa}}) = 0,$$

in denen $\mu_{\varkappa+1}, \ldots \mu_{\varkappa+\beta}, \ldots \mu_q$ in unbestimmter Reihenfolge diejenigen Zahlen bezeichnen, die von den r Reihen $1, 2 \ldots n_\varrho$ $(\varrho = 1 \ldots r)$ nach Wegnahme von $\mu_1 \ldots \mu_\alpha \ldots \mu_\varkappa$ übrig bleiben, und $\gamma_{\pi_1} \ldots \gamma_{\pi_\beta} \ldots \gamma_{\pi_{q-\varkappa}}$ Punkte aus der Reihe $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_r$ bedeuten, von denen auch zwei oder mehr unter sich oder mit Punkten γ_{ν_α} identisch sein können, nennen wir die wesentlichen Gleichungen des Systems 3⁰).

Unter diesen Voraussetzungen bestehen zwischen den Polynomien der Gleichungen 4⁰) und 5⁰) $\varkappa$ Beziehungen von der Form:

$$6^0)\qquad w^{(\mu_\alpha)}(\gamma_{\nu_\alpha}) = \sum_{\beta=1}^{q-\varkappa} c_{\alpha\beta} \,.\, w^{(\mu_{\varkappa+\beta})}(\gamma_{\pi_\beta}), \qquad (\alpha = 1, \ldots \varkappa)$$

*) Christoffel, Brioschi's Annalen, Serie II, Bd. IX, 1879.

wo die konstanten Koeffizienten $c_{\alpha\beta}$ nicht alle $= 0$ sind. Berücksichtigt man, dafs diese Beziehungen Identitäten (in Bezug auf die Koeffizienten $c_1 \ldots c_p$ von $u' = \Sigma c_\lambda u'_\lambda$ darstellen, und dafs daher in 6⁰) die beiderseitigen Multiplikatoren eines jeden Koeffizienten c_λ einander gleich sind, so erkennt man, dafs 6⁰) äquivalent ist mit den $\varkappa p$ Beziehungen:

$$7^0)\quad u^{(\mu_\alpha)}(\gamma_{\nu_\alpha}) = \sum_{\beta=1}^{q-\varkappa} c_{\alpha\beta} \cdot u_\lambda^{(\mu_{\varkappa+\beta})}(\gamma_{\pi_\beta}). \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1, 2 \ldots \varkappa\\ \lambda = 1, 2 \ldots p\end{pmatrix}$$

Mit Zuhilfenahme dieser Beziehungen, welche eine notwendige Folge der Annahme von $\varkappa$ überzähligen Gleichungen im System 3⁰) sind, nimmt die linke Seite der Relationen II_a^0) des vorigen Paragraphen die Form an:

$$\sum_{\varrho=1}^{r}\left[R_\varrho^{(1)} \cdot u'_\lambda(\gamma_\varrho) + \frac{R_\varrho^{(2)}}{1!} u''_\lambda(\gamma_\varrho) + \ldots + \frac{R_\varrho^{(n_\varrho)}}{(n_\varrho - 1)!} u_\lambda^{(n_\varrho)}(\gamma_\varrho)\right]$$

$$= \sum_{\beta=1}^{q-\varkappa} \frac{R_{\pi_\beta}^{(\mu_{\varkappa+\beta})}}{(\mu_{\varkappa+\beta} - 1)!} u_\lambda^{(\mu_{\varkappa+\beta})}(\gamma_{\pi_\beta}) + \sum_{\alpha=1}^{\varkappa} \frac{R_{\nu_\alpha}^{(\mu_\alpha)}}{(\mu_\alpha - 1)!} u_\lambda^{(\mu_\alpha)}(\gamma_{\nu_\alpha})$$

$$= \sum_{\beta=1}^{q-\varkappa} \frac{R_{\pi_\beta}^{(\mu_{\varkappa+\beta})}}{(\mu_{\varkappa+\beta} - 1)!} u_\lambda^{(\mu_{\varkappa+\beta})}(\gamma_{\pi_\beta})$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{\varkappa}\left[\frac{R_{\nu_\alpha}^{(\mu_\alpha)}}{(\mu_\alpha - 1)!} \cdot \sum_{\beta=1}^{q-\varkappa} c_{\alpha\beta} \cdot u_\lambda^{(\mu_{\varkappa+\beta})}(\gamma_{\pi_\beta})\right]$$

$$= \sum_{\beta=1}^{q-\varkappa}\left[u_\lambda^{(\mu_{\varkappa+\beta})}(\gamma_{\pi_q}) \cdot \left\{\frac{R_{\pi_\beta}^{(\mu_{\varkappa+\beta})}}{(\mu_{\varkappa+\beta} - 1)!} + \sum_{\alpha=1}^{\varkappa} \frac{R_{\nu_\alpha}^{(\mu_\alpha)}}{(\mu_\alpha - 1)!} c_{\alpha\beta}\right\}\right],$$

worin $(\mu_{\varkappa+\beta} - 1)!$ und $(\mu_\alpha - 1)$ gleich 1 zu nehmen sind, wenn $\mu_{\varkappa+\beta}$ und μ_α gleich 1 sind. Setzt man hierin

$$8^0)\qquad \frac{R_{\pi_\beta}^{(\mu_{\varkappa+\beta})}}{(\mu_{\varkappa+\beta} - 1)!} + \sum_{\alpha=1}^{\varkappa} \frac{R_{\nu_\alpha}^{(\mu_\alpha)}}{(\mu_\alpha - 1)!} c_{\alpha\beta} = 0,$$

$$\text{für } \beta = 1, 2 \ldots q - \varkappa,$$

so sind die p Beziehungen II_a^0) des vorigen Paragraphen ganz sicher erfüllt. Die $q - \varkappa$ Gleichungen 8⁰), in denen

nicht alle $c_{\alpha\beta}$ gleich Null sind, bestimmen jede eine der $q-\varkappa$ Gröfsen R_{π_β}, während die $\varkappa$ Gröfsen R_{ν_α} willkürlich bleiben und also auch von Null verschieden angenommen werden können. Unter der Voraussetzung, dafs das System 3°) $\varkappa\,(\geqq 1)$ überzählige Gleichungen enthält, lassen sich somit die Gröfsen R_ϱ so bestimmen, dafs die p Beziehungen II$_a$°) des vorigen Paragraphen erfüllt sind, ohne dafs alle $R_\varrho = 0$ sind. Fassen wir das Vorhergehende zusammen, so können wir daher, nach Satz I°), § 28, folgenden Satz aussprechen:

Satz III°) Die erforderliche und ausreichende Bedingung dafür, dafs zu einem Punktsystem $\gamma_1 \cdots \gamma_\varrho \cdots \gamma_r$, das den Punkt γ_ϱ allgemein n_ϱ-mal enthält, eine Funktion τ der Klasse existiert, die in allen diesen Punkten $\gamma_\varrho\,(\varrho = 1, \ldots r)$ oder in einem Teile derselben zur Ordnung n_ϱ oder zu einer niedrigeren Ordnung unstetig wird, ist dafs das Gleichungssystem 3°) überzählige Gleichungen enthält.

Dieser Satz liefert ein drittes Kriterium für Punktsysteme der Klasse.

Die bisherigen Erörterungen dieses Paragraphen geben uns nunmehr auch die Antwort auf die Frage, wann eine vorgegebene Funktion τ der Klasse von der Ordnung q eine Funktion I. Gattung ist, und wann eine Funktion II. Gattung.

Bedeutet $\varkappa$ wieder die genaue Anzahl der überzähligen Gleichungen des der Funktion τ entsprechenden Gleichungssystems 3°), so sind zwei Fälle zu unterscheiden.

A°) Es sei $$q - \varkappa < p.$$

In diesem Falle bestimmen die wesentlichen Gleichungen des Systems 3°) $q-\varkappa$ von den Koeffizienten $c_1 \ldots c_p$ des allgemeinen Integranden I. Gattung als Funktionen der übrigen $\varkappa$ Koeffizienten, welche willkürlich bleiben. Für $q-\varkappa < p$ läfst sich daher der allgemeine Integrand I. Gattung

$$w' = \sum_{\lambda=1}^{p}{}' c_\lambda\, u'_\lambda,$$

ohne identisch Null zu werden, so bestimmen, dafs er in jedem Unstetigkeitspunkte der Funktion τ zu derselben Ordnung verschwindet, zu der τ daselbst unstetig wird. Nach § 28 läfst sich dann τ als Quotient von zwei Integranden I. Gattung darstellen, d. h. τ ist eine Funktion I. Gattung.

B°) Es sei $$q - \varkappa = p.$$

In diesem Falle ist die Anzahl der wesentlichen, d. h. von einander unabhängigen Gleichungen des Systems 3°) gleich der Anzahl der zu bestimmenden Koeffizienten $c_1 \dots c_p$ von w'.

Das System 3°) hat daher nur ein Lösungssystem, nämlich das System $c_1 = \dots = c_p = 0$. Für $q - \varkappa = p$ wird also w' identisch Null, wenn man ihm die Bedingung auferlegt, in jedem Unstetigkeitspunkt γ_ϱ von τ zu einer Ordnung zu verschwinden, die gleich der Ordnung des Unendlichwerdens von τ in diesem Punkte ist. τ ist daher eine Funktion II. Gattung.

Die Differenz $q - \varkappa$ kann nicht gröfser als p sein. Wäre nämlich die Anzahl $q - \varkappa$ der wesentlichen Gleichungen des Systems 3°) gleich $p + k$, so würden irgend p dieser Gleichungen für $c_1 \dots c_p$ den gemeinsamen Wert 0 liefern, und die übrigen k wesentlichen Gleichungen 3°) wären dann von selbst erfüllt, also von den p ersten abhängig, was der Voraussetzung widerspricht, dafs sie zu den wesentlichen Gleichungen gehören. Das Vorige liefert zusammen den

Satz IV°) Enthält das Gleichungssystem 3°), welches ausdrückt, dafs der allgemeine Integrand I. Gattung w' in jedem der Unstetigkeitspunkte $\gamma_\varrho (\varrho = 1 \dots r)$ einer Funktion τ der Klasse zu derselben Ordnung n_ϱ verschwindet, zu der τ daselbst unstetig wird, genau $\varkappa$ überzählige Gleichungen, so ist τ eine Funktion I. oder II. Gattung, je nachdem

$$q - \varkappa < p \quad \text{oder} \quad q - \varkappa = p$$

ist.

Aus dem Beweis des Satzes III⁰) ergiebt sich noch ein wichtiges Resultat. Bedeutet wieder τ irgend eine Funktion der Klasse, die in den Punkten $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_r$ zu den Ordnungen $n_1 \ldots n_\varrho \ldots n_r$ unstetig wird, so daſs τ die Gesamtordnung $q = \sum_{\varrho=1}^{r} n_\varrho$ besitzt, so läſst sich τ, nach Satz III⁰), § 28, darstellen in der Form:

$$9^0)\quad \tau = C + \sum_{\varrho=1}^{r} \Big[R_\varrho^{(1)} . t^{(1)}(o, \gamma_\varrho) + \frac{R_\varrho^{(2)}}{1!} t^{(2)}(o, \gamma_\varrho) + \cdots + \frac{R_\varrho^{(n_\varrho)}}{(n_\varrho - 1)!} t^{(n_\varrho)}(o, \gamma_\varrho) \Big],$$

wo die $t(o, \gamma_\varrho)$ definitiv normierte Integrale II. Gattung sind. Enthält nun das zum Punktsystem $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_r$ gehörige Gleichungssystem 3⁰) dieses Paragraphen genau $\varkappa$ überzählige Gleichungen von der Form 4⁰) und $q - \varkappa$ wesentliche Gleichungen von der Form 5⁰), so bestehen zwischen den R_ϱ die $q - \varkappa$ Beziehungen 8⁰), in denen die $\varkappa$ Gröſsen $R_{\nu_\alpha}^{(\mu_\alpha)}$ willkürlich sind. Mit Berücksichtigung dieser Beziehungen 8⁰) geht dann 9⁰) über in

$$10^0)\qquad \tau = C + \sum_{\alpha=1}^{\varkappa} \frac{R_{\nu_\alpha}^{(\mu_\alpha)}}{(\mu_\alpha - 1)!} \Big[t^{(\mu_\alpha)}(o, \gamma_{\nu_\alpha}) - \sum_{\beta=1}^{q-\varkappa} c_{\alpha\beta} . t^{(\mu_{\varkappa+\beta})}(o, \gamma_{\pi_\beta}) \Big],$$

worin nur noch $\varkappa + 1$ willkürliche Konstanten vorkommen, nämlich die $\varkappa$ Gröſsen $R_{\nu_\alpha}^{(\mu_\alpha)}$ und die additive Konstante C.

Der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck:

$$11^0)\qquad \tau_\alpha = t^{(\mu_\alpha)}(o, \gamma_{\nu_\alpha}) - \sum_{\beta=1}^{q-\varkappa} c_{\alpha\beta} . t^{(\mu_{\varkappa+\beta})}(o, \gamma_{\pi_\beta})$$

$$(\alpha = 1, 2 \ldots \varkappa)$$

ist ein Integral II. Gattung, das, gemäfs den Eigenschaften der definitiv normierten Integrale II. Gattung, durch seine Unstetigkeitspunkte allein vollständig bestimmt ist, an den Querschnitten a_λ und c_λ $(\lambda = 1 \ldots p)$ den Periodizitätsmodul 0 und an den Querschnitten b_λ $(\lambda = 1 \ldots p)$ den Periodizitätsmodul:

$$-2\left[u_\lambda^{(n_\alpha)}(\gamma_{\nu_\alpha}) - \sum_{\beta=1}^{q-\varkappa} c_{\alpha\beta} \cdot u_\lambda^{(n_{\varkappa+\beta})}(\gamma_{\pi_\beta})\right]$$

besitzt. Infolge der aus der Annahme von $\varkappa$ überzähligen Gleichungen sich ergebenden Beziehungen 7°) ist aber dieser Periodizitätsmodul $= 0$. τ_α $(\alpha = 1, 2 \ldots \varkappa)$ ist also eine Funktion von z, die in T' überall eindeutig ist, nur in einer endlichen Anzahl von Punkten zu endlicher Ordnung unstetig wird und an den Querschnitten von T' lauter verschwindende Periodizitätsmoduln hat, d. h. τ_α ist eine Funktion der Klasse. Die Ordnung dieser Funktion ist, wie der Ausdruck 11°) zeigt, höchstens $= q - \varkappa + 1$. Dies giebt den

Satz V°) Enthält das Gleichungssystem 3°), das einem Punktsysteme $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_r$ entspricht, in dem der Punkt γ_ϱ allgemein n_ϱ-mal vorkommt, genau $\varkappa$ überzählige Gleichungen, so läfst sich die allgemeinste Funktion τ der Klasse, die in den Punkten $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_r$ zu den Ordnungen $n_1 \ldots n_\varrho \ldots n_r$ unstetig wird, darstellen in der Form:

$$\tau = C + \sum_{\alpha=1}^{\varkappa} c_\alpha \cdot \tau_\alpha, \tag{12°}$$

worin die $\varkappa + 1$ Gröfsen $C, c_1, c_2 \ldots c_\varkappa$ die einzigen noch verfügbaren Konstanten sind, und $\tau_1 \ldots \tau_\alpha \ldots \tau_\varkappa$ Funktionen der Klasse bezeichnen, die höchstens von der Ordnung $q - \varkappa + 1$ sind, und deren Unstetigkeitspunkte dem Punktsysteme $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_r$ angehören.

Dieser Satz heifst der **Riemann-Roch'sche Satz.** Riemann hat denselben bewiesen für $q - \varkappa = p$, d. h. für Funktionen II. Gattung, und aufserdem für einige spezielle

Funktionen I. Gattung. Roch hat dann später den Satz auf Funktionen I. Gattung im allgemeinen ausgedehnt.*)

An Satz V°) schliefsen sich einige Folgerungen an.

Folgerung 1°) Die geringste Anzahl von verfügbaren Konstanten, welche die allgemeinste Funktion τ der Klasse mit vorgeschriebenen Unstetigkeitspunkten noch besitzen kann, beträgt 2. — Es folgt dies daraus, dafs $\varkappa \geqq 1$ ist.

Folgerung 2°) Jede Funktion τ der Klasse hat mindestens 2 Unstetigkeitspunkte. — Dieser schon früher bewiesene Satz folgt hier daraus, dafs die Anzahl $q - \varkappa$ der wesentlichen Gleichungen des Systems 3°) mindestens $= 1$ sein mufs.

Eine weitere Folgerung beruht auf einer Eigenschaft der Funktionen τ_α. Von diesen gilt nämlich der

Satz VI°) Die $\varkappa$ Funktionen $\tau_2 \ldots \tau_\alpha \ldots \tau_\varkappa$ der Klasse sind linear unabhängig, d. h. das lineare Aggregat

$$x_1 \tau_1 + x_2 \tau_2 + \ldots + x_\varkappa . \tau_\varkappa,$$

in dem $x_1 \ldots x_\varkappa$ verfügbare Konstanten sind, kann nur dann sich auf eine Konstante reduzieren, wenn alle $x_1 \ldots x_\varkappa$ gleich Null gesetzt werden.

Beweis: Jedes Aggregat $\sum_{\alpha=1}^{\varkappa} x_\alpha . \tau_\alpha$ ist zufolge 11°) von der Form:

$$\sum_{\alpha=1}^{\varkappa} x_\alpha . t^{(\mu_\alpha)}(o, \gamma_{\nu_\varkappa}) - \sum_{\alpha=1}^{\varkappa} x_\alpha . \sum_{\beta=1}^{q-\varkappa} c_{\alpha\beta} . t^{(\mu_{\varkappa+\beta})}(o, \gamma_{\pi_\beta}).$$

In diesem Ausdruck sind nicht alle $c_{\alpha\beta} = 0$; sind aufserdem auch nicht alle $x_\alpha = 0$, so verhält sich die Funktion $\Sigma x_\alpha \tau_\alpha$ der Klasse bezüglich ihres Unstetigwerdens wie folgt. Kommt einer der Punkte γ_{ν_α} unter den Punkten γ_{π_β} vor, so sind jedenfalls, wie aus den Bemerkungen zu den Gleichungssystemen 4°) und 5°) dieses Paragraphen hervorgeht, die zugehörigen Ordnungen μ_α und $\mu_{\varkappa+\beta}$ des Unstetigwerdens von einander verschieden; sind umgekehrt irgend

*) Riemann, Ges. Werke, pag. 101, 111, 200, 203.
Roch, Crelle's Journal, Bd. 64, pag. 372 ff.

zwei Ordnungen μ_α und μ_{π_β} einander gleich, so sind sicher die Punkte γ_{ν_α} und γ_{π_β}, in denen diese Unstetigkeiten gleicher Ordnung auftreten, von einander verschieden. Minuend und Subtrahend von $\Sigma x_\alpha \tau_\alpha$ werden also nie in demselben Punkte zu derselben Ordnung unstetig; ebensowenig enthalten Minuend und Subtrahend, jeder für sich betrachtet, Glieder, die in demselben Punkte zu derselben Ordnung unstetig werden, und so etwa bei geeigneter Bestimmung der konstanten Gröfsen x_α sich heben könnten. Sind daher nicht alle x_α $(\alpha = 1 \ldots \varkappa)$ gleich Null, so ist auf jeden Fall $\Sigma x_\alpha . \tau_\alpha$ eine Funktion der Klasse mit wirklichen Unstetigkeitspunkten, und daher keine Konstante. w. z. b w.

In 12°) sind noch $\varkappa + 1$ willkürliche Konstanten vorhanden. Dieselben lassen sich dazu benutzen, um der Funktion τ, deren Unstetigkeitspunkte festgelegt sind, noch eine Anzahl Nullpunkte aufzuprägen. In dieser Beziehung gilt der

Satz VII°) Verfügt man über die $\varkappa + 1$ willkürlichen Konstanten $C, c_1 \ldots c_\varkappa$ in 12°) so, dafs τ in $\varkappa$ beliebigen (getrennt oder vereinigt liegenden) Punkten $\beta_1 \ldots \beta_\varkappa$ verschwindet, so sind dadurch die übrigen $q - \varkappa$ Nullpunkte von τ im allgemeinen eindeutig bestimmt, d. h. τ ist dann im allgemeinen vollständig bestimmt bis auf einen konstanten Faktor.*)

Beweis: Soll $\tau = C + \sum_{\alpha=1}^{\varkappa} c_\alpha \tau_\alpha$ in den Punkten $\beta_1 \ldots \beta_\varkappa$ verschwinden, so müssen $C, c_1 \ldots c_\varkappa$ bestimmt werden aus den $\varkappa$ Gleichungen:

$$13°)\quad \begin{cases} \sum_{\alpha=1}^{\varkappa} c_\alpha . \tau_\alpha(\beta_1) = -C, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_{\alpha=}^{\varkappa} c_\alpha . \tau_\alpha(\beta_\varkappa) = -C. \end{cases}$$

*) Rost, Theorie der Riemann'schen Thetafunktion, pag. 25.

Ist die Determinante

$$14^0)\qquad D = \begin{vmatrix} \tau_1(\beta_1) \ldots \tau_\varkappa(\beta_1) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \tau_1(\beta_\varkappa) \ldots \tau_\varkappa(\beta_\varkappa) \end{vmatrix}$$

dieser Gleichungen nicht für jede Wahl der $\varkappa$ Punkte $\beta_1 \ldots \beta_\varkappa$ identisch Null, so bestimmen die Gleichungen 13⁰) die Koeffizienten $c_1 \ldots c_\varkappa$ sämtlich proportional zu C, und der Satz ist bewiesen. — In der Fläche T grenzen wir $\varkappa$ Bereiche $K_1 \ldots K_\varkappa$ ab, von denen keiner einen der Punkte $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_r$ enthält. Wäre nun $D = 0$ für irgend welche $\varkappa$ je in den Bereichen $K_1 \ldots K_\varkappa$ angenommenen Punkte $\beta_1 \ldots \beta_\varkappa$, so würde D als Funktion des variabelen Punktes β_1 für jeden innerhalb des Bereiches K_1 gelegenen Punkt β_1 Null sein, wie auch die $\varkappa - 1$ Punkte $\beta_2 \ldots \beta_\varkappa$ innerhalb der Bereiche $K_2 \ldots K_\varkappa$ angenommen sein mögen, und es müfsten dann auch, wegen der Linearunabhängigkeit von $\tau_1 \ldots \tau_\varkappa$, alle Unterdeterminanten $(\varkappa - 1)$-ter Ordnung von $\tau_1(\beta_1) \ldots \tau_\varkappa(\beta_1)$ in D Null sein für beliebige Lagen der Punkte $\beta_2 \ldots \beta_\varkappa$ innerhalb ihrer Bereiche. Wiederholt man diese Betrachtungen für die zu $\tau_1(\beta_1)$ gehörige Unterdeterminante von D, und fährt man so fort, so erhielte man schliefslich das Resultat, dafs $\tau_\varkappa(z)$ für jeden im Bereiche $K_\varkappa$ gelegenen Punkt $z = \beta_\varkappa$, und also auch für jeden Punkt von T den Wert Null hat. Letzteres ist aber unmöglich. — Es lassen sich also auf jeden Fall innerhalb der Gebiete $K_1 \ldots K_\varkappa$ Punkte $\beta_1' \ldots \beta_\varkappa'$ so auswählen, daft D nicht Null ist, wenn man $\beta_1 = \beta_1' \ldots \beta_\varkappa = \beta_\varkappa'$ werden läfst.

Da aber D als Funktion von $\beta_1 \ldots \beta_\varkappa$ betrachtet für $\beta_1 = \beta_1' \ldots \beta_\varkappa = \beta_\varkappa'$ stetig ist, so lassen sich in T $\varkappa$ Gebiete $L_1 \ldots L_\varkappa$ so abgrenzen, dafs D von Null verschieden ist, wie auch die $\varkappa$ Punkte $\beta_1 \ldots \beta_\varkappa$ in den entsprechenden Gebieten gewählt werden mögen. — Damit ist der Satz bewiesen.

Werden die $\varkappa$ Nullpunkte $\beta_1 \ldots \beta_\varkappa$ in spezieller Lage angenommen, so kann es vorkommen, dafs die übrigen $q - \varkappa$ Nullpunkte von τ durch die Annahme von $\beta_1 \ldots \beta_\varkappa$ nicht eindeutig bestimmt sind. Auf diesen Ausnahmefall, der, wie wir gleich hinzufügen wollen, stets und nur dann eintritt, wenn das Gleichungssystem 13⁰) überzählige

Gleichungen enthält, hat zuerst Herr Rost hingewiesen (siehe die Abhdlg.: Theorie d. Riem. ϑ-Funktion, pag. 63, Anmerkg. 6°).

Für die Zahl $\varkappa$, die in den Betrachtungen dieses Paragraphen eine ausschlaggebende Rolle gespielt hat, führen wir eine Bezeichnung ein: wir nennen, mit Christoffel, die Zahl $\varkappa$ den Überschuſs des Punktsystems $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_r$ der Klasse.*) Dieser Überschuſs ist nach Satz III°) stets $\geqq 1$.

Das Punktsystem $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_r$, welches das System der Unstetigkeitspunkte der Funktion τ der Klasse bildet, ist nicht das einzige Punktsystem der Klasse, dem der Überschuſs $\varkappa$ zukommt. — Wie wir früher (Satz VI°) § 12) bewiesen haben, nimmt die Funktion τ von der Ordnung $q = \sum_{\varrho=1}^{r} n_\varrho$ jeden beliebigen Wert K in einer Gruppe von q getrennt oder vereinigt liegenden Punkten von T an. Den ∞-vielen möglichen Werten von τ entsprechen so in T ∞-viele Gruppen von je q Punkten; je zwei dieser Punktsysteme nennen wir äquivalente Punktsysteme, und die Gesamtheit aller ∞-vielen Punktsysteme dieser Art die zur Funktion τ gehörigen äquivalenten Punktsysteme. Sind $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\sigma \ldots \varepsilon_q$ und $\delta_1 \ldots \delta_\sigma \ldots \delta_q$ irgend 2 solche Systeme, in denen die Funktion τ der Klasse den Wert a resp. b annimmt, so sind diese Punktsysteme die Null- und Unstetigkeitspunkte der Funktion $\dfrac{\tau - a}{\tau - b}$ der Klasse und sind daher verbunden durch die Gleichung des Abel'schen Theorems für Integrale I. Gattung, die sich in der Form der Kongruenz:

$$15^{0}) \qquad \sum_{\sigma=1}^{q} w(\varepsilon_\sigma) \equiv \sum_{\sigma=1}^{q} w(\delta_\sigma).$$

schreiben läſst, wo das Kongruenzzeichen $\equiv$ ausdrückt, daſs die zwei Seiten von 15°) einander gleich sind bis auf ein System zusammengehöriger Periodizitätsmoduln von w.

---

*) Herr Rost nennt die Differenz $q - \varkappa$ den Rang des Punktsystems $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_r$. — Wir halten an der Christoffel'schen Bezeichnung fest, weil sie uns natürlicher erscheint.

Die Null- und Unstetigkeitspunkte einer Funktion der Klasse bilden äquivalente Punktsysteme; berücksichtigt man daher, dafs die Funktion $\tau - a$, wo a eine beliebige Konstante bedeutet, dieselben Unstetigkeitspunkte $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_r$ hat wie τ selbst, so können wir den Satz VII.⁰) auch aussprechen, wie folgt:

Satz VII$_{a}^{0}$) Besitzt das Punktsystem $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_r$, in dem der Punkt γ_ϱ allgemein n_ϱ-mal vorkommt, den Überschufs $\varkappa$, so können für die Bildung eines mit ihm äquivalenten Punktsystems $\varkappa$ Punkte beliebig gewählt werden; durch dieselben sind die übrigen $q - \varkappa$ Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmt.

Berücksichtigt man ferner, dafs, wenn τ die allgemeinste Funktion der Klasse ist, die in den Punkten $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_r$ zu den Ordnungen $n_1 \ldots n_\varrho \ldots n_r$ unstetig wird, und $\beta_1 \ldots \beta_\sigma \ldots \beta_q$ resp. $\delta_1 \ldots \delta_\sigma \ldots \delta_q$ die zwei Systeme von je q getrennt oder vereinigt liegenden Punkten bezeichnen, in denen τ die beliebigen Werte b resp. d annimmt, die Funktion $\frac{\tau - b}{\tau - d}$ die allgemeinste Funktion der Klasse ist, die in den Punkten $\delta_1 \ldots \delta_\sigma \ldots \delta_q$ unstetig wird, so sieht man ein, dafs Satz VII$_{a}^{0}$) sich auch in der allgemeinen Form aussprechen läfst:

Satz VII$_{b}^{0}$) Besitzt das Punktsystem $\delta_1 \ldots \delta_\sigma \ldots \delta_q$, in dem die Funktion τ der Klasse irgend einen Wert d annimmt, den Überschufs $\varkappa$, so können für die Bildung eines mit ihm äquivalenten Punktsystems $\varkappa$ Punkte beliebig gewählt werden; durch diese sind die übrigen $q - \varkappa$ Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmt.

Dieser Satz läfst sich umkehren:

Satz VIII.⁰) Können für die Bildung eines mit dem Punktsysteme $\delta_1 \ldots \delta_\sigma \ldots \delta_q$ äquivalenten Punktsystems $\varkappa$ Punkte beliebig gewählt werden, und sind dadurch die übrigen $q - \varkappa$ Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmt, so hat das System $\delta_1 \ldots \delta_\sigma \ldots \delta_q$ den Überschufs $\varkappa$.

Beweis: Hätte das System $\delta_1 \ldots \delta_\sigma \ldots \delta_q$ den von $\varkappa$ verschiedenen Überschufs $\varkappa_1$, so könnten zur Bildung eines mit ihm äquivalenten Punktsystems $\varkappa_1$ $(\geqq \varkappa)$ Punkte beliebig gewählt werden, und durch diese $\varkappa_1$ Punkte wären die übrigen $q - \varkappa_1$ Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmt, was der Voraussetzung widerspricht.

Hieran schliefst sich der weitere, wichtige Satz:

Satz IX°) Äquivalente Punktsysteme haben denselben Überschufs.

Beweis: Angenommen, irgend eines der zu τ gehörigen äquivalenten Punktsysteme, etwa das System $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\sigma \ldots \varepsilon_q$, habe den Überschufs $\varkappa$. Für die Bildung irgend zweier mit $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\sigma \ldots \varepsilon_q$ äquivalenter Punktsysteme $\beta_1 \ldots \beta_\sigma \ldots \beta_q$ und $\delta_1 \ldots \delta_\sigma \ldots \delta_q$ können dann nach Satz VII$_b$°) je $\varkappa$ Punkte beliebig angenommen werden, wodurch die übrigen $q - \varkappa$ Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmt sind. Da aber auch $\beta_1 \ldots \beta_q$ und $\delta_1 \ldots \delta_q$ mit einander äquivalent sind, so folgt aus Satz VIII°), dafs jedes dieser zwei beliebigen Systeme den Überschufs $\varkappa$ hat. — Damit ist der Satz bewiesen.

Besitzt das System $\gamma_1 \cdots \gamma_\varrho \cdots \gamma_r$ der Unstetigkeitspunkte einer Funktion τ der Klasse von der Ordnung q den Überschufs $\varkappa$, so haben nach dem letzten Satze alle ∞-vielen mit einander und mit $\gamma_1 \ldots \gamma_r$ äquivalenten Systeme von je q getrennt oder vereinigt liegenden Punkten von T, welche den ∞-vielen möglichen Werten von τ entsprechen, denselben Überschufs $\varkappa$. Aus diesem Grunde nennen wir die Zahl $\varkappa$, die wir zuerst als Überschufs des Systems $\gamma_1 \cdots \gamma_\varrho \cdots \gamma_r$ der Unstetigkeitspunkte von τ bezeichnet hatten, auch wohl den **Überschufs der Funktion** τ. — Aus dem Vorigen ergiebt sich zugleich, dafs die Funktionen τ, $\tau - a$, $\dfrac{\tau - a}{\tau - b}$ denselben Überschufs haben.

Zum Schlusse noch einige Bemerkungen. — Ist τ eine Funktion I. Gattung vom Überschusse $\varkappa$, und ist keiner der in den wesentlichen Gleichungen 5°) auftretenden Punkte γ_{π_β} $(\beta = 1 \ldots q - \varkappa)$ identisch mit einem der Punkte γ_{ν_α}

($\alpha = 1 \ldots \varkappa$) in den überzähligen Gleichungen 4º), so nennen wir die $q - \varkappa$ Punkte $\gamma_{\pi_1} \ldots \gamma_{\pi_{q-\varkappa}}$ die wesentlichen, die $\varkappa$ Punkte $\gamma_{\nu_1} \ldots \gamma_{\nu_\varkappa}$ die notwendigen Punkte des Systems $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_r$, und diese Trennung der wesentlichen Punkte von den notwendigen ist unter den obigen Voraussetzungen immer möglich. Namentlich ist die Scheidung der Punkte $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_r$ in wesentliche und notwendige stets möglich, wenn alle diese Unstetigkeitspunkte von τ von der Ordnung 1 sind. — Durch Angabe der wesentlichen Punkte sind die notwendigen völlig bestimmt.

Sind Punkte γ_{ν_α} identisch mit Punkten γ_{π_β}, so ist unter Umständen eine solche Trennung der Unstetigkeitspunkte von τ in wesentliche und notwendige nicht mehr möglich. Dieses trifft stets zu, wenn im hyperelliptischen Falle (siehe Kapitel V) eine Funktion I. Gattung in einem Verzweigungspunkte α der zweiblättrigen hyperelliptischen Fläche T zu einer höheren als der zweiten Ordnung verschwindet. Betrachtet man z. B.*) die Funktion I. Gattung $(z - \alpha)^{-q}$, wo $1 < q \leq p - 1$ ist, so zerfällt das zugehörige Gleichungssystem 3º) in die wesentlichen Gleichungen:

$$w'(\alpha) = 0, \; w^{(3)}(\alpha) = 0, \; \ldots \; w^{(2q-1)}(\alpha) = 0,$$

und die q notwendigen Gleichungen:

$$w''(\alpha) = 0, \; w^{(4)}(\alpha) = 0, \; \ldots \; w^{(2q)}(\alpha) = 0.$$

Eine Scheidung der Unstetigkeitspunkte in q wesentliche und q notwendige ist jedoch unmöglich. Ist nämlich q ungerade, so zieht das q-malige Verschwinden von w' in α nur ein einmaliges weiteres Verschwinden von w' in α nach sich; ist q gerade, so folgt aus der Annahme, dafs w' zur Ordnung q in α verschwindet, nicht noch ein weiteres Verschwinden von w' in diesem Punkte.

Die allgemeine, genaue Charakterisierung der Fälle, in welchen eine Trennung der Punkte eines Punktsystems I. Gattung in wesentliche und notwendige nicht mehr möglich ist, steht zur Zeit noch aus und fordert eingehendere Untersuchungen.

---

*) Rost, l. c. pag. 63, Anm. 4.

§ 30. Funktionen erster Gattung.

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, dafs die Funktionen I. Gattung, die wir zunächst definiert hatten als Funktionen, die sich als Quotient zweier Integranden I. Gattung darstellen lassen, auch dadurch charakterisiert werden können, dafs für jede solche Funktion die Ungleichheit:

1°) $$q - \varkappa < p$$

besteht, wenn $\varkappa$ den Überschufs dieser Funktion bedeutet. — Im Folgenden sollen die wichtigsten aus diesen beiden Definitionsformen sich ergebenden Eigenschaften der Funktionen I. Gattung abgeleitet werden.

Satz I°) Die Ordnung q einer Funktion I. Gattung ist höchstens gleich $2p - 2$.

Der Beweis ergiebt sich unmittelbar daraus, dafs ein Integrand I. Gattung aufser den allen Integranden I. Gattung gemeinsamen, im Unendlichen gelegenen Nullpunkten, nur noch $2p - 2$ im Endlichen gelegene weitere Nullpunkte erster Ordnung besitzt.

Aus Satz I°) folgt, dafs Funktionen der Klasse von der Ordnung $q > 2p - 2$ notwendig Funktionen II. Gattung sind.

Dafs es wirklich Funktionen I. Gattung von der höchsten erreichbaren Ordnung $q = 2p - 2$ giebt, beruht auf folgendem Satze über Integranden I. Gattung:

Satz II°) Aufser den n im Unendlichen gelegenen Nullpunkten zweiter Ordnung, die allen Integranden I. Gattung gemeinsam sind, giebt es keinen weiteren Punkt von T, der Nullpunkt aller Integranden I. Gattung sei.

Beweis: Gäbe es unter den $2p - 2$ im Endlichen gelegenen Nullpunkten des allgemeinen Integranden I. Gattung

$$w' = c_1 \, . \, u_1' + \ldots + c_p \, . \, u_p'$$

einen allen Integranden I. Gattung, also auch den Normalintegranden $u_1' \ldots u_p'$ gemeinsamen festen Nullpunkt ε erster oder höherer Ordnung, so würde das Normalintegral II. Gattung $t(o, \varepsilon)$, das nach Früherem am Querschnitte b_λ

den Periodizitätsmodul $-2u'_\lambda(\varepsilon)$ besitzt, in T' lauter verschwindende Periodizitätsmoduln haben, also eine Funktion der Klasse sein, die nur in einem einzigen Punkte von T, und zwar zur ersten Ordnung, unstetig wird. Funktionen dieser Art sind aber für $p > 0$ unmöglich.

Aus Satz II.) folgt sogleich, dafs man zwei Integranden I. Gattung w'_1 und w'_2 stets so bestimmen kann, dafs keiner der im Endlichen gelegenen Nullpunkte von w'_1 mit einem der im Endlichen gelegenen Nullpunkte von w'_2 zusammenfällt. Denkt man sich dies ausgeführt, so ist der Quotient $\frac{w'_2}{w'_1}$ eine Funktion I. Gattung von der Ordnung $2p-2$.

Ein Punktsystem I. Gattung von der Ordnung $2p-2$ nennen wir ein vollständiges Punktsystem I. Gattung.*)

Beispiel: Enthält eine Funktion τ der Klasse von der Ordnung $q = 2p - 2$ p oder mehr verfügbare Konstanten, von denen eine additiv ist, so hat diese Funktion nach dem Riemann-Roch'schen Satze den Überschufs

$$\varkappa > p - 1.$$

Es ist daher

$$q - \varkappa \overline{\overline{<}} p - 1,$$

d. h. τ ist eine Funktion I. Gattung.

An Stelle der Ungleichheit 1.) schreiben wir von hier an die Gleichung:

$$2.)\qquad q - \varkappa = p - \lambda - 1,$$

wo λ eine Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, 3, \ldots p-2$ bedeutet. Ist nun das System $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_r$, das den Punkt γ_ϱ allgemein n_ϱ-mal enthält, das System der Unstetigkeitspunkte einer Funktion τ I. Gattung vom Überschusse $\varkappa$ und der Ordnung $q = \sum_{\varrho=1}^{r} n_\varrho$, so bestimmen die $q - \varkappa = p - \lambda - 1$ wesentlichen Gleichungen 5.) des vorigen Paragraphen nur $p - \lambda - 1$ von den p Koeffizienten $c_1 \ldots c_p$ des allgemeinen Integranden I. Gattung $w' = \sum_{\mu=1}^{p} c_\mu u'_\mu$; $\lambda + 1$ von diesen

*) Christoffel: Brioschi's Annalen, Serie II, Bd. IX. Febr. 1878.

Koeffizienten bleiben also willkürlich, und durch sie drücken sich die andern aus. Dies giebt den

Satz III°) Hat ein Punktsystem I. Gattung $\gamma_1 \dots \gamma_\varrho \dots \gamma_r$ das den Punkt γ_ϱ allgemein n_ϱ-mal enthält, die Ordnung $q = \Sigma n_\varrho$ und den Überschufs $\varkappa$, und ist

$$q - \varkappa = p - \lambda - 1,$$

so reduziert sich der allgemeine Integrand I. Gattung, der in jedem Punkte γ_ϱ zur entsprechenden Ordnung n_ϱ verschwindet, auf die Form:

$$3°) \qquad w' = c_1 \cdot w'_1 + \dots + c_{\lambda+1} \cdot w'_{\lambda+1},$$

wo $c_1 \dots c_{\lambda+1}$ verfügbare Konstanten sind, und $w'_1 \dots w'_{\lambda+1}$ linearunabhängige Integranden I. Gattung bezeichnen, die alle in jedem Punkte γ_ϱ zur Ordnung n_ϱ verschwinden.

Die $q - \varkappa = p - \lambda - 1$ wesentlichen Gleichungen 5°) des vorigen Paragraphen reichen also nicht aus zur vollständigen Bestimmung des allgemeinen Integranden I. Gattung. Dieser letztere ist, nachdem man ihm die Punkte $\gamma_1 \cdots \gamma_\varrho \cdots \gamma_r$ als Nullpunkte von den Ordnungen $n_1 \dots n_\varrho \dots n_r$ aufgeprägt hat, erst dann bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, wenn man ihm noch weitere λ von einander unabhängige Bedingungen auferlegt. Aus diesem Grunde nennen wir, mit Christoffel, die Zahl λ den Defekt des Punktsystems I. Gattung $\gamma_1 \dots \gamma_\varrho \dots \gamma_r$.

Ist die Funktion τ I. Gattung von der Ordnung $q = 2p - 2$, und bezeichnet $\varkappa$ den Überschufs, λ den Defekt des Systems $\gamma_1 \dots \gamma_{2p-2}$ ihrer Unstetigkeitspunkte, so giebt es nach Satz III°) $\lambda + 1$ linearunabhängige Integranden I. Gattung, die alle in diesen Punkten verschwinden. Wäre nun $\lambda > 0$, so gäbe es mindestens zwei linearunabhängige Integranden I. Gattung w'_1 und w'_2 mit denselben $2p - 2$ Nullpunkten im Endlichen; der Quotient $\dfrac{w'_1}{w'_2}$ wäre dann eine Funktion I. Gattung, die in T nirgends unstetig wird,

also eine Konstante, d. h. die zwei Integranden w'_1, w'_2 waren nicht linearunabhängig. Die Annahme $\lambda > 0$ führt daher auf einen Widerspruch. — Hat demnach eine Funktion I. Gattung die Ordnung $q = 2p - 2$, so ist ihr Defekt $\lambda = 0$ und ihr Überschufs $\varkappa = p - 1$. Hieraus folgt sogleich: schreibt man dem allgemeinen Integranden I. Gattung w' irgend $p - 1$ Nullpunkte vor, so sind dadurch die übrigen $p - 1$ Nullpunkte im allgemeinen eindeutig bestimmt, und nur dann nicht eindeutig bestimmt, wenn sich unter den Gleichungen, die ausdrücken, dafs der Integrand in den $p - 1$ ersten Punkten Null wird, überzählige befinden. Ein Beispiel hierzu findet sich bei Herrn Rost. l. c. pag. 63. Anmerkung 7.

Hat eine Funktion I. Gattung $\tau = \frac{w'_2}{w'_1}$ mit den Unstetigkeitspunkten $\gamma_1 \dots \gamma_q$, von denen auch mehrere identisch sein können, die Ordnung $q < 2p - 2$, so besitzt der Nenner w'_1 aufser $\gamma_1 \dots \gamma_q$ noch weitere $q' = 2p - 2 - q$ Nullpunkte

$$\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{q_1},$$

was wir kurz dadurch andeuten, dafs wir schreiben:

$$w'_1 = w'_1(o; \gamma_1 \dots \gamma_q; \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{q'}).$$

Das Punktsystem $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{q_1}$, das $\gamma_1 \dots \gamma_q$ zu einem vollständigen ergänzt, möge ein zum System $\gamma_1 \dots \gamma_q$ komplementäres Punktsystem heifsen. Bezeichnet man ferner die Nullpunkte von τ mit $\delta_1 \dots \delta_q$, so dafs

$$4°.) \qquad \tau = \frac{w'_2(o; \delta_1 \dots \delta_q; \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{q'})}{w'_1(o; \gamma_1 \dots \gamma_q; \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{q'})}$$

ist, so nennen wir die zwei Punktsysteme $\gamma_1 \dots \gamma_q$ und $\delta_1 \dots \delta_q$, welche dasselbe komplementäre Punktsystem besitzen, korresiduale Punktsysteme. Für dieselben gilt der

Satz IV°.) Korresiduale Punktsysteme haben gleichen Überschufs und gleichen Defekt.

Beweis: Dafs die zwei korresidualen Punktsysteme $\gamma_1 \dots \gamma_q$ und $\delta_1 \dots \delta_q$ denselben Überschufs haben, folgt direkt aus Satz IX°.) des vorigen Paragraphen. — Dafs ihre

Defekte λ und λ_1 einander gleich sind, ergiebt sich ohne weiteres aus den beiden Beziehungen:

$$q - \varkappa = p - \lambda - 1,$$
$$q - \varkappa = p - \lambda_1 - 1.$$

Nach diesem Satze haben alle zur Funktion I. Gattung τ gehörigen äquivalenten Punktsysteme denselben Überschufs $\varkappa$ und denselben Defekt λ; wir nennen deshalb auch kurz ι eine Funktion I. Gattung mit dem Überschufs $\varkappa$ und dem Defekt λ. Jede mit ι in einer lineo-linearen Relation stehende Funktion $\sigma = \frac{A \cdot \iota + B}{\iota - C}$, wo A, B, C Konstanten bedeuten, ist ebenfalls eine Funktion I. Gattung mit dem Überschufs $\varkappa$ und dem Defekt λ.

Wir betrachten nun auch das zu $\gamma_1 \ldots \gamma_q$ komplementäre Punktsystem $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{q'}$. Von diesem Systeme wissen wir nicht von vornherein, ob es ein Punktsystem der Klasse ist oder nicht; wir können von ihm zunächst nur das eine sagen, dafs es jedenfalls einen Defekt besitzt, für den vorerst auch der Wert 0 in Aussicht zu nehmen ist, dafs es also, wenn es ein Punktsystem der Klasse ist, jedenfalls ein Punktsystem I. Gattung ist, und dafs es dann und nur dann ein Punktsystem der Klasse ist, wenn es einen von Null verschiedenen Überschufs besitzt. — Führen wir nun zur Untersuchung des Systems $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{q'}$ seinen Überschufs $\varkappa'$ und seinen Defekt λ' als Unbekannt ein, so ergiebt sich eine wichtige Beziehung zwischen $\varkappa$ und λ einerseits und $\varkappa'$ und λ' andererseits.

Denkt man sich nämlich den Nenner w_1' von τ so bestimmt, dafs er in den Punkten $\gamma_1 \ldots \gamma_q$ verschwindet, so bleiben nach Satz III 9) noch λ Nullpunkte von w_1' zur Verfügung. Wählen wir diese beliebig, so sind dadurch die übrigen $q' - \lambda$ Nullpunkte von w_1' im allgemeinen eindeutig bekannt. Diese λ willkürlichen Punkte seien so gewählt, dafs das zu $\gamma_1 \ldots \gamma_q$ komplementäre System $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{q'}$ entsteht. Soll nun τ nur die Ordnung q besitzen, so mufs auch der Zähler w_2' so bestimmt werden, dafs er in den nämlichen Punkten $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{q'}$ verschwindet. Da aber das System $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{q'}$ den Defekt λ' besitzt, so ist w_2' dadurch, dafs man ihm die Punkte $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{q'}$ als Nullpunkte aufprägt,

noch nicht vollkommen bestimmt, sondern es bleiben noch λ' Nullpunkte von w_2', also ebensoviele Nullpunkte von τ zur Verfügung. Nach dem Riemann-Roch'schen Satze bleiben aber, wenn man einer Funktion τ mit dem Überschusse $\varkappa$ die Unstetigkeitspunkte aufgeprägt hat, noch $\varkappa$ Nullpunkte von τ zur Verfügung. Es ist daher:

$$5^0) \qquad \lambda' = \varkappa.$$

Aus den Beziehungen:

$$q - \varkappa = p - \lambda - 1,$$
$$q' - \varkappa' = p - \lambda' - 1,$$
$$q + q' = 2p - 2,$$

in denen, wie eben bewiesen, $\lambda' = \varkappa$ ist, folgt dann noch, wie eine leichte Rechuung zeigt:

$$6^0) \qquad \lambda = \varkappa'.$$

Dies giebt den

Satz V⁰) Hat das Punktsystem I. Gattung $\gamma_1 \ldots \gamma_q$ $(q < 2p - 2)$ den Überschufs $\varkappa$ und den Defekt λ, so hat das zu ihm komplementäre Punktsystem $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{q'}$, $(q' + q = 2p - 2)$ den Überschufs λ und den Defekt $\varkappa$.

Dieser Satz, aus dem noch folgt, dafs das System $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{q'}$ dann und nur dann ein Punktsystem I. Gattung ist, wenn der Defekt λ des Systems $\gamma_1 \ldots \gamma_q \geqq 1$ ist, ist identisch mit dem sogenannten Reciprozitätsgesetz der Herren Brill und Nöther.*) Aus 5⁰) und 6⁰) lassen sich nämlich ohne Mühe die Relationen

$$q - 2\varkappa = q' - 2\varkappa',$$
$$q + 2\lambda = q' + 2\lambda'$$

ableiten, welche ausdrücken, dafs jedes zu $\gamma_1 \ldots \gamma_q$ komplementäre Punktsystem umgekehrt wieder das System $\gamma_1 \ldots \gamma_q$ zum komplementären Punktsystem hat.

---

*) Brill u. Nöther, Matth. ann. Bd. VII.

§ 31. Funktionen zweiter Gattung.

Verschwindet der allgemeine Integrand $w' = \sum_{\mu=1}^{p} c_\mu u'_\mu$ identisch, wenn man ihm die Bedingung auferlegt, in den Unstetigkeitspunkten γ_ϱ ($\varrho = 1 \ldots r$) einer Funktion τ der Klasse jedesmal zu derselben Ordnung n_ϱ zu verschwinden, zu der τ in γ_ϱ unstetig wird, so heifst τ, nach Früherem, eine Funktion II. Gattung. Nach § 29, Satz IV⁰), ist diese Definition nichts anderes als der Ausdruck dafür, dafs für jede Funktion τ II. Gattung

1⁰) $$q - \varkappa = p$$

ist, wenn q die Ordnung und $\varkappa$ den Überschufs von τ bezeichnet.

Da $\varkappa \gtreqless 1$ ist, so folgt aus 1⁰) unmittelbar:

Satz I⁰) Die niedrigste Ordnung q, zu der es Funktionen zweiter Gattung geben kann, ist

$$q = p + 1.$$

Hieraus und aus Satz I⁰) des vorigen Paragraphen ergiebt sich: Funktionen der Klasse, deren Ordnung $q < p + 1$ ist, sind Funktionen I. Gattung; Funktionen, deren Ordnung $q > 2p - 2$ ist, sind Funktionen II. Gattung. Für $p = 2$ z. B. ist $2p - 2 = p$, $p + 1 = 3$. Für $p = 2$ sind daher alle etwa existierenden Funktionen von der Ordnung 2 Funktionen I. Gattung, alle Funktionen, deren Ordnung gröfser als 2 ist, Funktionen II. Gattung.

Weierstrafs hat (in Vorlesungen von 1869 an) die in Satz I⁰) nachgewiesene Minimalordnung von Funktionen II. Gattung zur Definition des Geschlechtes p benutzt.

Es sei nun wieder $\gamma_1 \ldots \gamma_\varrho \ldots \gamma_r$ das System der Unstetigkeitspunkte einer Funktion τ II. Gattung $n_1 \ldots n_\varrho \ldots n_r$ die zugehörigen Ordnungszahlen, und

2⁰) $$w^{({}^u\varkappa+1)}(\gamma_{\pi_1}) = 0, \ldots w^{({}^u\varkappa+\beta)}(\gamma_{\pi_\beta}) = 0, \ldots w^{({}^u\varkappa+p)}(\gamma_{\pi_p}) = 0$$

die wesentlichen Gleichungen des zum System $\gamma_1 \cdots \gamma_\varrho \cdots \gamma_r$ gehörigen Gleichungssystems 3⁰) des § 29. Es lassen sich

dann Integranden I. Gattung nachweisen, die dem System 2°) in eigentümlicher Weise zugeordnet sind.

Da die Gleichungen 2°) von einander unabhängig sind, lassen sie sich auch erfüllen, wenn wir auf der rechten Seite die Null durch beliebige Konstanten ersetzen, d. h. die Koeffizienten $c_1 \ldots c_p$ von $w' = \Sigma c_\mu u'_\mu$ lassen sich so bestimmen, dafs die p Gleichungen:

$$3°) \qquad w^{(\mu\varkappa+\beta)}(\gamma_{\pi_\beta}) = A_\beta \qquad (\beta = 1, 2 \ldots p)$$

erfüllt sind, wo $A_1 \ldots A_\beta \ldots A_p$ willkürliche Konstanten bedeuten. Bezeichnet man die Determinante dieser p Gleichungen mit Δ, so ergiebt sich:

$$4°) \quad c_\mu = B_{1\mu} . A_1 + B_{2\mu} . A_2 + \ldots + B_{\beta\mu} . A_\beta + \ldots + B_{p\mu} . A_p, \quad (\mu = 1, \ldots p)$$

worin allgemein:

$$5°) \qquad B_{\beta\mu} = \frac{\Delta_{\beta\mu}}{\Delta}$$

ist, und $\Delta_{\beta\mu}$ die zu $u^{(\mu\varkappa+\beta)}(\gamma_{\pi_\beta})$ gehörige Subdeterminante von Δ bezeichnet. Setzt man diese Werte von c_μ $(\mu = 1 \ldots p)$ ein, so wird w' lineare und homogene Funktion der p Konstanten A:

$$w'(o) = A_1 . \sum_{\mu=1}^{p} B_{1\mu} . u'_\mu + A_2 . \sum_{\mu=1}^{p} B_{2\mu} . u'_\mu + \ldots + A_p . \sum_{\mu=1}^{p} B_{p\mu} . u'_\mu,$$

oder

$$w'(o) = \sum_{\sigma=1}^{p} A_\sigma . \sum_{\mu=1}^{p} B_{\sigma\mu} . u'_\mu(o),$$

d. h.

$$6°) \qquad w'(o) = \sum_{\sigma=1}^{p} A'_\sigma . U'_\sigma(o),$$

wo

$$7°) \qquad U'_\sigma(o) = \sum_{\mu=1}^{p} B_{\sigma\mu} . u'_\mu(o)$$

ist.

Da nun nach 3°)

$$A_\beta = \sum_{\sigma=1}^{p} A_\sigma . U_\sigma^{(\mu\varkappa+\beta)}(\gamma_{\pi_\beta})$$

ist, so folgt aus dem Umstande, dafs $A_1 \dots A_p$ willkürliche Konstanten sind:

$$8^{\circ})\quad \begin{cases} U_\beta^{(u_{\varkappa+\beta})}(\gamma_{\pi_\beta}) = 1, \\ U_\sigma^{(u_{\varkappa+\beta})}(\gamma_{\pi_\beta}) = 0, \quad \text{für } \sigma \neq \beta. \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser p linear unabhängigen Integranden U'_σ läfst sich, für den Fall einer Funktion τ II. Gattung, die in § 29, 12°) gegebene Darstellung einer Funktion τ der Klasse etwas umformen. Berücksichtigt man nämlich, dafs nach 6°) dieses Paragraphen:

$$w^{(u_\alpha)}(\gamma_{\nu_\alpha}) = \sum_{\sigma=1}^{p} A_\sigma \,.\, U_\sigma^{(u_\alpha)}(\gamma_{\nu_\alpha})$$

ist, so folgt aus 6°) des § 29:

$$\sum_{\beta=1}^{p} c_{\alpha\beta}\, w^{(u_{\varkappa+\beta})}(\gamma_{\pi_\beta}) = \sum_{\sigma=1}^{p} A_\sigma \,.\, U_\sigma^{(u_\alpha)}(\gamma_{\nu_\alpha}),$$

d. h. nach 3°)

$$\sum_{\beta=1}^{p} c_{\alpha\beta} \,.\, A_\beta = \sum_{\sigma=1}^{p} A_\sigma \,.\, U_\sigma^{(u_\alpha)}(\gamma_{\nu_\alpha}).$$

Da die Konstanten $A_1 \dots A_p$ willkürlich sind, so folgt schliefslich allgemein

$$9^{\circ})\quad c_{\alpha\beta} = U_\beta^{(u_\alpha)}(\gamma_{\nu_\alpha}), \quad \text{für } \beta = 1, 2 \dots p),$$

und die in 12°), § 29 auftretenden Funktionen τ_α der Klasse nehmen die Form an:

$$10^{\circ})\quad \tau_\alpha = t^{(u_\alpha)}(o, \gamma_{\nu_\alpha}) - \sum_{\beta=1}^{p} . \, U_\beta^{(u_\alpha)}(\gamma_{\nu_\alpha}) \,.\, t^{(u_{\varkappa+\beta})}(\gamma_{\pi_\beta}).$$

Sind namentlich die Unstetigkeitspunkte von τ alle von der ersten Ordnung und bezeichnet man die Punkte γ_{ν_α} kurz mit γ_α, die Punkte γ_{π_β} mit γ_β, so ist

$$11^{\circ})\quad \tau_\alpha = t(o, \gamma_\alpha) - \sum_{\beta=1}^{p} . \, U'_\beta(\gamma_\alpha) \,.\, t(o, \gamma_\beta).$$

Ist hierin γ_α kein Nullpunkt von U'_β $(\beta = 1 \dots p)$, so ist τ_α eine Funktion der Klasse von der niedrigsten bei Funktionen

II. Gattung möglichen Ordnung $p+1$, und zwar hat, wie 11º) zeigt, τ_α im Punkte γ_α das Residuum 1, im Punkte γ_β das Residuum $-U'_\beta(\alpha)$.

Funktionen dieser Art hat zuerst Weierstraſs gebildet, um dann von ihnen aus zu den Integranden I. Gattung zu gelangen.

---

§ 32. Die Fälle $p=0$ und $p=1$.

Gemäſs der Definition der Funktionen I. Gattung als Quotienten zweier Integranden I. Gattung sind für $p=0$ und $p=1$ keine Funktionen I. Gattung möglich. Grundgleichungen $F\binom{n\ m}{s, z}=0$ vom Geschlechte $p=0$ oder $p=1$ liefern also nur Funktionen II. Gattung.

1º) $p=0$: Die Klasse der Funktionen, die zu einer Grundgleichung vom Geschlecht $p=0$ gehören, enthält nach Satz IIIº) § 19 keinen Integranden I. Gattung und liefert daher auch kein Integral I. Gattung. Dagegen giebt es für $p=0$ immer noch Integrale II. Gattung, und die früher gegebene Ableitung derselben zeigt, wie man bei gegebener Grundgleichung ein solches Integral $t(o, \varepsilon)$ bilden kann. Für $p=0$ besitzt aber $t(o, \varepsilon)$ keine Periodizitätsmoduln mehr, da die Riemann'sche Fläche T für $p=0$ ohne Querschnitte einfach zusammenhängend ist. $t(o, \varepsilon)$ ist also für $p=0$ eine algebraische Funktion der Klasse von der Ordnung 1 und dem Residuum 1 im Unstetigkeitspunkte ε.

Bezeichnen wir dieses Integral kurz mit σ, so besteht nach Satz 1º) § 13 zwischen σ und einer beliebigen Funktion τ der Klasse von der Ordnung q eine algebraische Gleichung von der Form:

$$\Psi\binom{1\ \ q}{\tau, \sigma}=0;$$

jede Funktion τ der Klasse ist also r a t i o n a l e Funktion von σ, und dies gilt auch von der ursprünglichen unabhängigen Variabelen z. Bildet man daher das Integral der Klasse

$$J=\int \tau \, . \, dz \, .$$

so ist

$$J = \int R(\sigma) \,.\, d\sigma,$$

wo $R(\sigma)$ eine rationale Funktion von σ bezeichnet. — Die Theorie der Funktionen der Klasse $p = 0$ und ihrer Integrale ist somit nichts anderes als die Theorie der rationalen Funktionen **einer** Variabeln und ihrer Integrale.

II⁰) $p = 1$: Ist die zur irreducibelen Grundgleichung $F\binom{n\ \ m}{s, z} = 0$ gehörige Riemann'sche Fläche T vom Geschlecht $p = 1$, so ist die Anzahl r ihrer Doppelpunkte gleich

$$(m-1)(n-1)-1,$$

und es existiert ein und nur ein auf ihr überall endliches Integral

$$w = \int \frac{\varphi\binom{n-2\ m-2}{s\ \ ,\ z}}{F'(s, z)}\, dz.$$

Dieses Integral ist eindeutig in der einfach zusammenhängenden Fläche T', die sich ergiebt, wenn man in T ein Querschnittpaar a, b anlegt (Fig. 25a), wo noch an der Kreuzungsstelle P die Buchstaben α, β, γ analog wie in Fig. 33 hinzuzudenken sind, und besitzt in T' zwei konstante Periodizitätsmoduln

$$\omega_1 = \int \left|\begin{matrix}\gamma\\ b\\ \beta\end{matrix}\right| dw, \quad \omega_2 = \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ a\\ \beta\end{matrix}\right| dw,$$

genau wie das Riemann'sche elliptische Integral I. Gattung.

Jede Funktion τ der Klasse ist, als Funktion von w aufgefafst, einwertig und doppelperiodisch mit den Perioden ω_1 und ω_2.*) Unter diesen Funktionen giebt es Funktionen von der niedrigsten Ordnung $p + 1 = 2$. Sei σ eine solche. Dann ist σ als Funktion von w von der Ordnung 2, und zwischen ihr und ihrer Ableitung $\sigma' = \frac{d\sigma}{dw}$ besteht nach

*) Siehe Satz I⁰) § 48.

bekannten Sätzen aus der Theorie der einwertigen, doppelperiodischen Funktionen eine algebraische Gleichung von der Form:

$$\sigma'^2 = F_4,$$

wo F_4 eine ganze Funktion von σ bezeichnet von einem Grade, der die Zahl 4 nicht überschreiten kann. Es ist daher

$$\left(\frac{d\sigma}{dw}\right)^2 = A(\sigma - \alpha)(\sigma - \beta)(\sigma - \gamma)(\sigma - \delta),$$

wo A eine positive Konstante bedeutet, und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Konstanten bezeichnen, deren Werte von einander verschieden sind. Hieraus ergiebt sich

$$w = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{A}} \cdot d\sigma}{\sqrt{(\sigma - \alpha)(\sigma - \beta)(\sigma - \gamma)(\sigma - \delta)}};$$

das einzige für $p = 1$ existierende Integral I. Gattung hat also genau die Form des Riemann'schen elliptischen Integrals I. Gattung.

Zu der Funktion σ der Klasse von der Ordnung 2 nehmen wir nun noch eine weitere Funktion S der Klasse von der Ordnung $\mu = 2\nu + 1$, wo ν eine ganze Zahl $\geqq 1$ sei. Zwischen σ und Z besteht dann unter allen Umständen eine irreducibele algebraische Gleichung von der Form:

$$f\left(\overset{2}{S}, \overset{\mu}{\sigma}\right) = 0.$$

Die zu dieser Gleichung gehörige Riemann'sche Fläche T_1 ist zweiblättrig und kann daher nur einfache Verzweigungspunkte besitzen. Die Anzahl r dieser letzteren ist

$$r = 2p + 2(2 - 1) = 4.$$

Die Fläche T_1 ist also die Fläche der elliptischen Funktionen. Da andererseits die Klasse der rationalen Funktionen von s und z identisch ist mit der Klasse der rationalen Funktionen von S und σ, so folgt: die Theorie des Falles $p = 1$ ist nichts anderes als die Theorie de Funktionen auf einer elliptischen Riemann'schen Fläche, d. h. die

Theorie der einwertigen, doppelperiodischen Funktionen einer Variabeln.

Beispiele: Folgende Grundgleichungen gehören zum Geschlechte $p=1$:

1°) $$s^6 = z(z-\alpha)^2(z-\beta)^3,$$

2°) $$s^3 = z(z-\alpha)(z-\beta),$$

3°) $$s^2 = z(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma),$$

4°) $$s^4 = z(z-\alpha)(z-\beta)^2.$$

Siehe E. Netto: Dissertatio: de transformatione aequationis $y^n = R(x)$, Berlin (1870, Schade).

Kapitel V.

Die birationalen Transformationen.

§ 33. Definition der birationalen Transformationen.

Die Sätze des § 13.) geben Anlafs zur Einführung eines in der Theorie der algebraischen Funktionen sehr wichtigen Begriffes.

Ist eine Funktionenklasse des Geschlechtes p definiert durch die irreducibele algebraische Gleichung

$$1.) \qquad F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right) = 0,$$

so gelten für irgend zwei algebraische Funktionen S und Z der Klasse die Darstellungen:

$$2.) \qquad S = R_1(s, z), \; Z = R_2(s, z),$$

wo R_1, R_2 rationale Funktionen von s und z bedeuten.

Sind aufserdem S und Z gegenseitig irreducibele (siehe § 13) Funktionen von den Ordnungen μ und ν, so besteht zwischen ihnen eine irreducibele, algebraische Gleichung von der Form:

$$3.) \qquad \varphi\left(\overset{\nu}{S}, \overset{\mu}{Z}\right) = 0,$$

und es läfst sich jede Funktion der Klasse, also auch s und z selbst, darstellen in der Form

$$4.) \qquad s = P_1(S, Z), \; z = P_2(S, Z),$$

wo P_1, P_2 rationale Funktionen von S und Z bezeichnen.

Diese Resultate lassen sich auch wie folgt aussprechen. Eliminiert man s und z aus 1º) mit Hilfe der rationalen Substitution 2º), so ergiebt sich die Gleichung 3º) — Die Gleichungen 4º) sagen dann weiter aus: die Substitution 2º) ist rational umkehrbar, d. h.: s und z sind ebenfalls rationale Funktionen von S und Z.

Wir definieren nun:

Definition: Eine Transformation (Substitution)

$$S = R_1(s, z), \quad Z = R_2(s, z),$$

worin R_1, R_2 rationale Funktionen von s und z bezeichnen, die so beschaffen ist, dafs umgekehrt:

$$s = P_1(S, Z), \quad z = P_2(S, Z)$$

ist, wo P_1, P_2 rationale Funktionen von S und Z sind, heifst eine **birationale** Transformation.

Wir können daher auch sagen: die Grundgleichung $F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right) = 0$ geht durch die birationale Transformation 2º) über in $\Psi\left(\overset{\nu}{S}, \overset{\mu}{Z}\right) = 0$.

Diese transformierte (durch birationale Transformation erhaltene) Gleichung $\Psi = 0$ ist nichts anderes als die Bedingung dafür, dafs die drei Gleichungen

1º) $$F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right) = 0,$$

2º) $$S - R_1(s, z) = 0, \quad Z - R_2(s, z) = 0$$

durch ein gemeinsames System von Werten s, z befriedigt werden können. Die durch die Gleichungen 2º) definierte birationale Transformation umkehren, d. h. in die Form

4º) $$s = P_1(S, Z), \quad z = P_2(S, Z)$$

bringen, heifst nichts anderes, als dies gemeinschaftliche Wurzelsystem s, z der drei Gleichungen 1º) und 2º) bestimmen. Dabei verdient es, hervorgehoben zu werden, dafs man das System dieser Werte s, z, d. h. die Gleichungen 4º), auf algebraischem Wege finden kann, ohne die Gleichungen 1º) und 2º) wirklich aufzulösen (siehe etwa Salmon-

Fiedler, Höhere Algebra, pag. 110 ff.). Es können hierbei jedoch zwei Möglichkeiten auftreten.

1º) s und z lassen sich nicht aus den Gleichungen 2º) allein als rationale Funktionen von S und Z darstellen, sondern nur unter Hinzunahme der Grundgleichung $F\binom{n\ m}{s,\ z}=0$. Dies ist der gewöhnliche, allgemeine Fall.

2º) s und z lassen sich aus den Gleichungen 2º) allein als rationale Funktionen von S und Z darstellen, ohne Hinzunahme der Grundgleichung $F\binom{n\ m}{s,\ z}=0$. In diesem Falle definieren die Gleichungen 2º) eine sogenannte Cremonasche Transformation.

Dafs birationale Transformationen der letzten Art wirklich auftreten können, möge an einem speziellen Beispiele nachgewiesen werden.

Beispiel:*) Es sei gegeben die Grundgleichung:

$$1^\circ) \qquad F\binom{5\ 5}{s,\ z} = s^5 - 5s^3(z^2+z+1) + 5s(z^2+z+1) - 2z(z^2+z+1) = 0,$$

und die Transformationsgleichungen:

$$2^\circ) \qquad S = \frac{s^2}{z^2+z+1},\ Z = \frac{s}{z-\alpha^2},$$

wo α eine imaginäre dritte Einheitswurzel bedeutet.

Die Funktion S der Klasse ist von der Ordnung 2; sie wird unstetig zur ersten Ordnung in den Nullpunkten von $z^2+z+1=0$, und zwar jedesmal wie $(z-\varepsilon)^{-\frac{1}{5}}$, wenn ε den Wert von z im betreffenden Nullpunkte von $z^2+z+1=0$ bezeichnet. Die Funktion Z der Klasse ist von der Ordnung 3.

Aus den Gleichungen 2º) ergiebt sich unmittelbar:

$$3^\circ) \qquad s = \frac{(\alpha-\alpha^2)\,S\,Z}{S-Z^2},\ z = \frac{\alpha S-\alpha^2 Z^2}{S-Z^2},$$

*) Siehe Baker, Abelian Funktions, pag 5 u. 6.

ohne Hinzunahme der Grundgleichung $F = 0$. Die transformierte Gleichung lautet:

$$\Psi\left(\overset{3}{S}, \overset{2}{Z}\right) = Z^2 - \frac{1}{2}(1 - \alpha^2) Z S (S^2 - 5 S + 5) - \alpha^2 S = 0.$$

Die Gleichungen 2⁰) definieren also eine Cremona'sche Transformation.

Wendet man dagegen auf die obige Grundgleichung $F\left(\overset{5}{s}, \overset{5}{z}\right) = 0$ die Transformationsgleichungen:

$$S = \frac{s^2}{z^2 + z + 1}, \quad Z = \frac{z}{s},$$

an, so lassen sich diese Gleichungen nicht rational umkehren ohne Hinzunahme der Gleichung $F = 0$.

Da nach Früherem die durch die Grundgleichung $F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right) = 0$ definierte Klasse algebraischer Funktionen identisch ist mit der Klasse algebraischer Funktionen, die durch die Gleichung $\Psi\left(\overset{\nu}{S}, \overset{\mu}{Z}\right) = 0$ definiert ist, so läfst sich die transformierte Gleichung $\Psi = 0$ ebensowohl als definierende Grundgleichung der Klasse ansehen, wie die Gleichung $F = 0$ selbst. Es wirft sich damit von selbst die Frage auf, ob es nicht möglich ist, durch birationale Transformationen Gleichungen $\Psi = 0$ zu erzielen, die möglichst einfach sind, z. B. in Bezug auf die Vielfachheit der auftretenden Verzweigungspunkte und Wurzelkoinzidenzen, oder in Bezug auf die Grade ν und μ. Andererseits mufs auch untersucht werden, ob es für die durch die Gleichung 1⁰) definierte Funktionenklasse nicht vielleicht charakteristische Gröfsen und Funktionen giebt, die sich bei Anwendung einer birationalen Transformation nicht ändern, sich einer solchen Transformation gegenüber invariant verhalten.

Von § 15 an haben wir bei allen unseren Untersuchungen vorausgesetzt, dafs die definierende Grundgleichung der Klasse nur einfache Verzweigungspunkte und von sonstigen vielfachen Punkten nur Doppelpunkte aufweise. Die Berechtigung dieser Annahme gründet sich darauf, dafs es möglich ist, die Grundgleichung 1⁰) durch

birationale Transformationen so umzuformen, daſs nur noch einfache Verzweigungspunkte und gewöhnliche Doppelpunkte auftreten. Zum Beweise hierfür verweisen wir auf die Litteratur.*)

Die übrigen vorhin aufgeworfenen Fragen sollen in den nächsten Paragraphen behandelt werden.

§ 34. Die Invarianz des Geschlechtes p.

Der Grundgleichung $F\binom{n\,m}{s,z}=0$ entspricht eine Riemannsche Fläche T, die sich n-blättrig über der z-Ebene ausbreitet und die Verzweigungsart von s als Funktion von z darstellt; ebenso entspricht der durch die birationale Transformation 2⁰) (§ 33) aus $F=0$ hervorgegangenen transformierten Gleichung $\Psi\binom{\nu\;\;\mu}{S,Z}=0$ eine Riemann'sche Fläche T_1, die sich ν-blättrig über der Z-Ebene ausbreitet und die Verzweigungsart von S als Funktion von Z darstellt. Durch die birationale Transformation 2⁰) sind diese zwei Flächen T und T_1 so aufeinander bezogen, daſs jedem Punkte von T ein Punkt von T_1, und jedem Punkte von T_1 ein Punkt von T entspricht. Denkt man sich ferner die Flächen von T und T_1 als Riemann'sche Kugelflächen, so entspricht jeder unendlich kleinen Ortsänderung in einer der zwei Flächen eine unendlich kleine Ortsänderung in der andern, und jedem ununterbrochenen Linienzug in T ein zusammenhängender Linienzug in T_1. Den p Querschnittbündeln $(a\,b\,c)_\varkappa$ $(\varkappa=1\ldots p)$, die T in eine einfachzusammenhängende Fläche T' verwandeln, entsprechen daher p Querschnittsbündel $(a'b'c')_\varkappa$, die T_1 in eine Fläche T_1' umformen.

Diese Fläche T_1' ist 1⁰) zusammenhängend. Bedeuten nämlich P_1 und P_1' irgend zwei Punkte in T_1', P und P'

*) Cayley, Quart. Journ. of Math. t. 7 (1865) und Journal f. Math. Bd. 64 (1865). — Hamburger, Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 16. 1871. — Nöther, Gött. Nachr. 1871, pag. 267; Math. Annalen Bd. 9 (1875) u. Bd. 23. (1883). — Halphen, Etude sur les points singuliers; Anhang zur franz. Ausg. v. Salmon's Higher plane curves, Gauth. Villars 1884. — Vergl. auch Picard, Traité d'analyse, T. II, pag. 360 ff. (1893): Appell et Goursat, Théorie des fonct. alg. et de leurs intégrales, pag. 283 (1895) und E. Vessiot, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse. 1896.

die entsprechenden Punkte von T', so läfst sich in T' ein Weg l angeben, der von P nach P' führt, ohne einen Querschnitt zu überschreiten. Der entsprechende Weg l_1 in T_1' führt dann auch in T_1' von P_1 nach P_1', ohne einen Querschnitt zu überschreiten. Die Fläche T_1' ist 2°) einfachzusammenhängend; denn wäre sie es nicht, so würde einem sie nicht zerstückelnden Querschnitt λ_1 ein Querschnitt λ in T' entsprechen, der auch T' nicht zerstückelt, was unmöglich ist. T und T_1 werden also durch dieselbe Anzahl Querschnitte in einfachzusammenhängende Flächen verwandelt. Das Geschlecht p dieser Flächen und auch dasjenige der zugehörigen Gleichungen $F = 0$ und $\Psi = 0$ ist also dasselbe. Dies giebt den wichtigen

Satz I°) Das Geschlecht einer algebraischen Gleichung wird durch eine birationale Transformation nicht geändert.

Da die Gleichung $F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right) = 0$ und die transformierte Gleichung $\Psi\left(\overset{\prime}{S}, \overset{\prime\prime}{Z}\right) = 0$ dieselbe Klasse algebraischer Funktionen definieren, können wir auch sagen: $F = 0$ und $\Psi = 0$ sind Gleichungen derselben Klasse. Der vorige Satz läfst sich dann auch so aussprechen:

Satz I$_a$°) Gleichungen derselben Klasse haben auch dasselbe Geschlecht.

Für $p > 1$ läfst sich Satz I°) umkehren.

Satz II°) Läfst eine rationale Transformation

$$S = R_1(s, z), \ \ Z = R_2(s, z)$$

das Geschlecht $p\,(> 1)$ einer algebraischen Gleichung unverändert, so ist die Transformation eine birationale.*)

Beweis: $F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right) = 0$ werde durch die rationale Transformation

$$S = R_1(s, z), \ \ Z = R_2(s, z)$$

*) Siehe die Abhandlung von Herrn Weber, Crelle's Journ. Bd. 76.

übergeführt in

$$\Psi\left(\overset{v}{S}, \overset{u}{Z}\right) = 0,$$

und es sei das Geschlecht p_1 von $\Psi = 0$ gleich dem Geschlechte p von $F = 0$.

Durch die rationale Transformation geht jeder Integrand I. Gattung v der durch $\Psi = 0$ definierten Funktionenklasse über in eine lineare, homogene Funktion der p linear-unabhängigen Integranden I. Gattung u der durch $F = 0$ definierten Funktionenklasse.

Ist daher allgemein:

$$v = \frac{\psi(S, Z)}{\Psi'(S, Z)}, \qquad u = \frac{\varphi(s, z)}{F'(s, z)},$$

so folgt:

$$\frac{\psi_1(S, Z)}{\Psi'(S, Z)} = a_1 \frac{\varphi_1(s, z)}{F'(s, z)} + \dots + a_p \frac{\varphi_p(s, z)}{F'(s, z)},$$

$$\frac{\psi_2(S, Z)}{\Psi'(S, Z)} = b_1 \frac{\varphi_1(s, z)}{F'(s, z)} + \dots + b_p \frac{\varphi_p(s, z)}{F'(s, z)},$$

worin $a_1 \dots a_p$, $b_1 \dots b_p$ konstante Koeffizienten bedeuten, und weiter

$$\frac{\psi_1(S, Z)}{\psi_2(S, Z)} = \frac{a_1 \cdot \varphi_1(s, z) + \dots + a_p \cdot \varphi_p(s, z)}{b_1 \cdot \varphi_1(s, z) + \dots + b_p \cdot \varphi_p(s, z)}.$$

Den Punkten der zu $\Psi = 0$ gehörigen Fläche T_1, in denen $\psi_1(S, Z) = 0$ wird, entsprechen demnach auf der zu $F = 0$ gehörigen Fläche T Punkte, in denen

$$a_1 \varphi_1(s, z) + \dots + a_p \cdot \varphi_p(s, z) = 0$$

wird. Wenn folglich einem beliebigen Punkte von T_1 r Punkte von T entsprechen, so mufs, da $\psi_1(S, Z)$ in T_1 und $\sum_{\varkappa=1}^{p} \alpha_\varkappa \cdot \varphi_\varkappa(s, z)$ in T je $2p - 2$ variabele Nullpunkte besitzen, die Beziehung

$$r(2p_1 - 2) \leqq 2p - 2$$

bestehen, welche, da r eine positive, ganze Zahl ist, für $p_1 = p$ nur dann erfüllt sein kann, wenn

$$r = 1$$

ist. — Jedem Punkt von T_1 entspricht also nur ein Punkt von T, d. h. die betrachtete rationale Transformation ist eine birationale.

Bemerkung. Ist eine algebraische Gleichung $F(s, z) = 0$ gegeben, so erhält man, je nachdem man z oder s als unabhängige Variabele ansieht, zwei verschiedene Riemann'sche Flächen T_z und T_s. Nach Satz 1⁰) haben diese zwei Flächen dasselbe Geschlecht. Ist daher z. B. die Gleichung $F = 0$ in Bezug auf eine der zwei Variabeln, etwa in Bezug auf z, vom ersten Grade, so reduziert sich die zugehörige Riemann'sche Fläche T_s auf die einfache z-Ebene, und die Fläche T_z ist daher einfach zusammenhängend.

---

§ 35. Die Moduln der Klasse.

Die Grundgleichung $F = 0$ enthält nur eine endliche Anzahl von Gliedern; die zugehörige Riemann'sche Fläche T hängt daher nur von einer endlichen Anzahl von Konstanten, nämlich den Koeffizienten von $F = 0$ ab. Geht nun $F = 0$ durch birationale Transformation in eine Gleichung $\Psi = 0$ über, so steht nicht ohne weiteres fest, dafs die zu $\Psi = 0$ gehörige Fläche T_1 von ebensoviel Konstanten abhängt, wie T. Es läfst sich im Gegenteil wohl denken, dafs wir die birationale Transformation so wählen können, dafs T_1 von weniger Konstanten abhängt wie T. Es ergiebt sich so unmittelbar die Frage, ob es eine untere Grenze für die Erniedrigung dieser Konstantenzahl giebt, und welches die niedrigste Zahl der wesentlichen, durch birationale Transformation nicht mehr wegzuschaffenden Konstanten ist, von denen die allgemeinste Gleichung $F = 0$ oder Fläche T des Geschlechtes p abhängt. Diese wesentlichen Konstanten oder Parameter heifsen nach Riemann*) die Moduln der Klasse.

---

*) Riemann, Ges. Werke, pag. 113, 114.

Durch die Koeffizienten von $F = 0$ sind die Verzweigungspunkte der zugehörigen Fläche T völlig bestimmt. Wendet man nun auf $F = 0$ eine birationale Transformation an, so lassen sich die Konstanten dieser Transformation so wählen, dafs in der zur transformierten Gleichung gehörigen Fläche T_1 eine bestimmte Anzahl von Verzweigungspunkten in beliebig gewählte Lagen gedrängt werden kann, während die übrigen Verzweigungspunkte in T_1 fest bleiben. Die Anzahl dieser bei einer birationalen Transformation fest bleibenden Verzweigungspunkte in T_1 ist die Zahl der Moduln der Klasse. Diese Zahl läfst sich, wie folgt, bestimmen.

Bezeichnet T die zur Grundgleichung $F = 0$ gehörige Riemann'sche Fläche, so denken wir uns dieselbe zunächst durch eine birationale Transformation

$$S = R_1(s, z), \quad Z = R_2(s, z),$$

in der Z eine Funktion II. Gattung von der Ordnung $\mu > 2p - 2$ sei, in eine neue Fläche T_1 vermandelt, die sich μ-blättrig über der Z-Ebene ausbreitet. Von dieser Fläche T_1 gehen wir nun aus und schreiben an Stelle von S und Z wieder s und z.

Wenden wir auf T_1 die birationale Transformation

$$\sigma = s, \; \zeta = R(s, z)$$

an, wo ζ eine Funktion II. Gattung von der Ordnung μ sei, so besteht zwischen σ und ζ eine irreducible algebraische Gleichung, die in σ vom Grade μ ist; die zugehörige Fläche T_2 hat also μ Blätter, ebenso wie T_1. Der transformierenden Funktion ζ können wir die μ Unstetigkeitspunkte nach Belieben vorschreiben; nach dem Riemann-Roch'schen Satze enthält dieselbe dann noch

$$\varkappa + 1 = \mu - p + 1$$

willkürliche Konstanten, wenn $\varkappa$ den Überschufs der Funktion ζ bezeichnet. Im ganzen enthält also ζ

$$2\mu - p + 1$$

willkürliche Konstanten. Über diese Konstanten können wir nun, im allgemeinen, so verfügen, dafs $2\mu - p + 1$ von

den $2(\mu + p - 1)$ einfachen Verzweigungspunkten von T_2 vorgeschriebene Lagen einnehmen. Die Zahl

$$2(\mu + p - 1) - (2\mu - p + 1) = 3p - 3$$

der übrigen, durch die birationale Transformation nicht berührten, festen Verzweigungspunkte von T_2 ist die Zahl der Klassenmoduln. Wir haben so den

Satz I.) Die Klasse vom Geschlechte p hat im allgemeinen $3p - 3$ Moduln.

Dieser Satz giebt für $p > 1$ nur eine obere Grenze für die Anzahl der Moduln einer Fläche T der Klasse. Wir werden später sehen, dafs es für jedes $p > 1$ Flächen der Klasse giebt, die sogenannten hyperelliptischen Flächen, die nur $2p - 1$ Moduln besitzen, weil zwischen den Verzweigungspunkten einer solchen Fläche $p - 2$ Relationen bestehen.

Auch die Flächen vom Geschlechte $p = 0$ und $p = 1$ bilden eine Ausnahme von dem vorigen allgemeinen Satz. Der Beweis dieses Satzes beruht nämlich wesentlich auf der Annahme, dafs wir über die $2\mu - p + 1$ Konstanten von ζ so verfügen können, dafs $2\mu - p + 1$ Verzweigungspunkte von T_2 eine vorgeschriebene Lage einnehmen. Diese Annahme trifft jedoch nicht mehr zu, wenn die ursprüngliche Fläche T_1 in sich selbst transformiert*) werden kann durch eine birationale Transformation

$$\sigma = s, \ \zeta = R(s, z),$$

in der noch willkürliche Parameter übrig bleiben. Ist r die Anzahl dieser Parameter, so können die $2\mu - p + 1$ Konstanten von ζ nicht mehr sämtlich dazu benutzt werden, um ebensoviele Verzweigungspunkte von T_2 der Lage nach zu fixieren, sondern nur noch $2\mu - p + 1 - r$; die übrigen r Konstanten dienen dazu, die Möglichkeit der Transformation der Fläche T_1 in sich selbst zu repräsentieren. Die Anzahl der festbleibenden Verzweigungspunkte von T_2, d. h. die Zahl der Moduln der Klasse, ist dann also

$$2(\mu + p - 1) - (2\mu - p + 1 - r) = 3p - 3 + r.\text{**)}$$

*) Siehe den nächsten Paragraphen.

**) Diese Formel rührt von Herrn Klein her. Siehe dessen Schrift: Über Riemann's Theorie der algebraischen Funktionen. Kap. III.

Wie sich im nächsten Paragraphen ergeben wird, ist für $p=0: r=3$; für $p=1: r=1$; für $p>1: r=0$. Die Anzahl der Moduln der Klasse ist daher:

$$\begin{array}{lll} \text{für } p=0: & \text{gleich} & 0, \\ \text{„ } p=1: & \text{„} & 1, \\ \text{„ } p>1: & \text{„} & 3p-3, \end{array}$$

wenn die Fläche T nicht zu den hyperelliptischen Flächen gehört.

---

§ 36. Transformation einer Fläche *T* in sich selbst.

Wenn die Gleichung:

$$F\binom{n\ m}{s, z}=0,$$

zu der die Fläche T gehört, durch die birationale Transformation

$$S=R_1(s, z),\ Z=R_2(s, z)$$

übergeführt wird in

$$F\binom{n\ m}{S, Z}=0,$$

zu der wieder dieselbe Fläche T gehört, so sagen wir: die Gleichung $F\binom{n\ m}{s, z}=0$, oder auch die zugehörige Fläche T, wird durch die birationale Transformation in sich selbst transformiert. — Wir wollen diese Transformation kurz besprechen und unterscheiden dabei die drei Fälle $p=0$, $p=1$ und $p>1$.

1°) $p=0$: Ist die Grundgleichung $F\binom{n\ m}{s, z}=0$ vom Geschlechte $p=0$, so lassen sich nach § 32 alle Funktionen der Klasse, also auch s und z, als rationale Funktionen einer Funktion ζ der Klasse darstellen. Ist z. B.

$$s=R_1(\zeta),\ z=R_1(\zeta),$$

so entspricht jedem Werte von ζ ein und nur ein Wert von s und ein und nur ein Wert von z, und daher jedem Punkte der ζ-Ebene ein und nur ein Punkt der zu $F=0$ gehörigen

Fläche T. — Umgekehrt ist ζ, als Funktion der Klasse, rationale Funktion von s und z:

$$\zeta = R(s, z).$$

Jedem zusammengehörigen Wertepaare s, z entspricht also auch nur ein Wert von ζ, und folglich jedem Punkte der Fläche T ein und nur ein Punkt der ζ-Ebene. Die Fläche T vom Geschlechte $p = 0$ läſst sich daher mit Hilfe der birationalen Transformation

$$s = R_1(\zeta), \quad z = R_2(\zeta)$$

in eine einblättrige Fläche T_1 überführen. Diese letztere, die einfache ζ-Ebene, wird durch jede Transformation

$$\sigma = \frac{a\zeta - 1}{b\zeta - d}$$

mit drei willkürlichen Parametern a, b, d in sich selbst transformiert, wobei diese willkürlichen Parameter dazu benutzt werden können, um drei beliebige Punkte der ζ-Ebene in drei beliebige andere Punkte derselben Ebene überzuführen. Dasselbe gilt also auch von der ursprünglichen Fläche T. Wir haben so den

Satz I°) Ist die Grundgleichung $F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right) = 0$ vom Geschlecht $p = 0$, so läſst sich die zugehörige Fläche T in sich selbst transformieren durch eine birationale Transformation mit $r = 3$ willkürlichen Parametern.

II°) $p = 1$: In diesem Falle läſst sich, nach § 32, die zur Grundgleichung $F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right) = 0$ gehörige Fläche T durch birationale Transformation in die zweiblättrige Riemann'sche Fläche T_1 mit vier Verzweigungspunkten verwandeln, die den elliptischen Funktionen entspricht. Was sich von der Transformation von T_1 in sich selbst beweisen läſst, gilt also auch von der ursprünglichen Fläche T.

Es sei u das zu T_1 gehörige Integral I. Gattung. Sind ω_1, ω_2 die Periodizitätsmoduln desselben in der einfach zusammenhängenden Fläche T_1', so ist jede Funktion τ der Klasse einwertige, doppelperiodische Funktion von u, mit

den Perioden ω_1, ω_2, und umgekehrt ist jede einwertige, doppelperiodische Funktion von u eine Funktion der Klasse. Bezeichnen wir demnach die Variabeln in der Fläche T_1 wieder mit s und z, so ist

$$1^{0})\qquad s = \varphi(u), \quad z = \varphi_1(u),$$

wo $\varphi(u)$ und $\varphi_1(u)$ doppelperiodische Funktionen von u bezeichnen. — Setzen wir nun

$$2^{0})\qquad S = \varphi(u+t), \quad Z = \varphi_1(u+t),$$

wo t eine willkürliche Konstante bedeutet, so sind auch S und Z einwertige, doppelperiodische Funktionen von u und daher, als Funktionen der Klasse, rational darstellbar durch s und z, d. h. es ist

$$3^{0})\qquad S = R(s, z, t), \quad Z = R_1(s, z, t),$$

wo R und R_1 rationale Funktionen von s und z bezeichnen, die von dem willkürlichen Parameter t abhängen. Ebenso sind umgekehrt s und z rationale Funktionen von S und Z. Die Transformation 3°) ist also birational und geht aufserdem, wie man leicht sieht, für $t = 0$ in die identische Substitution

$$S = s, \quad Z = z$$

über. Wie aber leicht einzusehen ist (siehe Apell et Goursat pag. 267), geht u durch jede birationale Transformation wieder in ein Integral I. Gattung über, d. h. es ist bei Anwendung von 3°)

$$u'(s, z) = \mu \,.\, u'(S, Z),$$

wo μ, wie sich durch Betrachtungen ähnlich den sogleich für $p > 1$ anzustellenden ergiebt, von t unabhängig ist. Da 3°) für $t = 0$ in die identische Substitution $S = s$, $Z = z$ übergeht, so ist $\mu = 1$, und es ist die birationale Transformation 3°) mit dem einen willkürlichen Parameter t äquivalent mit der transcendenten Beziehung:

$$4^{0})\qquad u(S, Z) = u(s, z) + C,$$

wo C eine beliebige Konstante bedeutet. Wie sich übrigens (siehe etwa Appell et Goursat, Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales, pag. 474 ff.) nachweisen

läfst, erhält man alle birationalen Transformationen, welche T_1 in sich selbst überführen, indem man 4°) kombiniert mit allen Transformationen von der Form:

$$u(S, Z) = \nu \cdot u(s, z),$$

wo ν eine primitive Wurzel einer der Gleichungen:

$$\nu^2 = 1, \ \nu^3 = 1, \ \nu^4 = 1, \ \nu^6 = 1$$

bedeutet. Die birationale Transformation 3°) führt also T_1 in sich selbst über, und es gilt daher für T_1 und folglich auch für T_2 der

Satz II°) Jede allgemeine Fläche T vom Geschlechte $p = 1$ läfst sich durch birationale Transformation in sich selbst überführen, und jede solche Transformation enthält **einen** willkürlichen Parameter.

Für spezielle Flächen des Geschlechtes $p = 1$ vergleiche etwa Baker, Abelian Functions, § 394.

III°) $p > 1$: Für diesen Fall gilt der von Herrn Schwarz (Crelle, Bd. 87) bewiesene

Satz III°) Eine allgemeine Gleichung oder Fläche T des Geschlechtes $p > 1$ läfst sich nicht in sich selbst transformieren durch birationale Transformationen, die einen willkürlichen Parameter enthalten.

Beweis:*) Angenommen, die Gleichung $F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right) = 0$, oder die zugehörige Fläche T, lasse sich in sich selbst transformieren durch eine birationale Transformation

$$3°) \quad \begin{cases} S = R(s, z, t), \\ Z = R_1(s, z, t), \end{cases}$$

die den willkürlichen Parameter t enthalte. Sind dann $u_1' \ldots u_p'$ die p linearunabhängigen Normalintegranden I. Gattung, so werden (siehe den nächsten Paragraphen) diese Integranden durch die birationale Transformation in

*) Siehe Picard, Traité d'analyse, t. II.

Integranden I. Gattung $u'_1(S, Z), \ldots u'_p(S, Z)$ übergeführt, die sich wieder als ganze, lineare Funktionen von $u'_1 \ldots u'_p$ darstellen lassen. Ist z. B.

$$5^0) \qquad u'_1(S, Z) = \alpha_1 \,.\, u'_1(s, z) + \ldots + \alpha_p \,.\, u'_p(s, z)$$

wo $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ von s und z unabhängige Konstanten bedeuten, so läfst sich beweisen, dafs diese Konstanten auch von t unabhängig sind. Läfst man nämlich, indem man t einen festen, sonst beliebigen Wert beilegt, die Variabele z in der einfach zusammenhängenden Fläche T' vom Punkte β (Fig. 34) auf dem negativen Rande von a_1 längs $\bar{b}_1$ nach dem gegenüberliegenden Punkte γ auf dem positiven Rande von a_1 gehen, so wachsen $u_1(s, z) \ldots u_p(s, z)$ um die Periodizitätsmoduln:

$$\pi i, 0, \ldots 0.$$

Zugleich mit diesem Wege von z beschreibt auch Z in der einfach zusammenhängenden Fläche T'_1, die zur transformierten Gleichung gehört, einen Ringweg, der $u_1(S, Z)$ etwa in $u_1(S, Z) + \omega_1$ überführe, wo ω_1 offenbar von t unabhängig ist. Es ist dann

$$\omega_1 = \alpha_1 \,.\, \pi i,$$

und daher α_1 unabhängig von t. Läfst man z analog der Reihe nach die Ringwege $\bar{b}_2, \ldots \bar{b}_p$ in $+$ Richtung durchlaufen, so ergeben sich die weiteren Beziehungen:

$$\omega_2 = \alpha_2 \,.\, \pi i, \ldots \omega_p = \alpha_p \,.\, \pi i,$$

aus denen sich ergiebt, dafs auch $\alpha_2 \ldots \alpha_p$ von t unabhängig sind.

Nimmt man ein zweites Normalintegral $u_2(s, z)$, so erhält man, analog wie für $u_1(s, z)$ die Beziehung:

$$6^0) \qquad u'_2(S, Z) = \beta_1 \,.\, u'_1(s, z) + \ldots + \beta_p \,.\, u'_p(s, z),$$

wo $\beta_1 \ldots \beta_p$ wieder von s, z und t unabhängige Konstanten sind.

Aus 5^0) und 6^0) folgt:

$$7^0) \qquad \frac{u'_1(S, Z)}{u'_2(S, Z)} = \frac{\alpha_1 \,.\, u'_1(s, z) + \ldots + \alpha_p \,.\, u'_p(s, z)}{\beta_1 \,.\, u'_1(s, z) + \ldots + \beta_p \,.\, u'_p(s, z)}.$$

Diese Beziehung enthält nach dem Vorigen den willkürlichen Parameter t nicht mehr und weist also jedem Punkt s, z der ursprünglichen Fläche T eine endliche Anzahl von Punkten S, Z der transformierten Fläche T_1 zu. Die birationale Transformation 3°) mit dem willkürlichen Parameter t weist aber, wenn wir ein Wertepaar s, z festhalten, diesem Wertepaare, bei kontinuierlicher Änderung von t, unendlich viele Wertepaare S, Z zu. Die Annahme, dafs es für $p > 1$ eine birationale Transformation mit einem willkürlichen Parameter gebe, welche die ursprüngliche Fläche T in sich selbst transformiert, führt also zu einem Widerspruch.

Für die Theorie der algebraischen Funktionen vom Geschlecht $p > 1$ mit einer endlichen Anzahl von birationalen Transformationen in sich vergleiche Hurwitz, Matth. Ann. Bd. 41. pag. 406 ff.

---

§ 37. Normalformen der Grundgleichung.

Wendet man auf die eine Klasse algebraischer Funktionen definierende Grundgleichung $F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right) = 0$ eine birationale Transformation an, so geht diese Grundgleichung über in eine neue Gleichung $\Psi\left(\overset{\nu}{S}, \overset{\mu}{Z}\right) = 0$, die wie wir früher gesehen haben, wieder als definierende Gleichung derselben Funktionenklasse angesehen werden kann. Durch geeignete Wahl der birationalen Transformation läfst sich nun erreichen, dafs die neue Gleichung $\Psi = 0$ eine möglichst einfache Gestalt annimmt, z. B. von möglichst niedrigem Grade in der neuen Veränderlichen ist. Derartige, möglichst einfache Formen der Grundgleichung nennen wir Normalformen derselben.*)

Die *Zurückführung* der Grundgleichung $F = 0$ auf eine Normalform beruht auf dem

*) Der Begriff der „Normalform" ist ein sehr dehnbarer und hängt davon ab, was man unter einer möglichst einfachen Grundgleichung versteht. Daher die verschiedenen „Normalformen" für dasselbe p.

Satz 1°) Der Quotient $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ zweier φ-Funktionen geht durch birationale Transformation wieder in einen Quotienten $\frac{\psi_1}{\psi_2}$ zweier φ-Funktionen über.

Beweis: Durch birationale Transformation geht jedes Integral I. Gattung $\int \frac{\varphi(s, z)}{F'(s, z)} dz$ wieder in ein Integral I. Gattung $\int \frac{\psi(S, Z)}{\Psi'(S, Z)} . dZ$ über (siehe Riemann, Ges. W. pag. 111 und Appell et Goursat pag. 267). Es bestehen also die Beziehungen:

$$\frac{\varphi_1(s, z) . dz}{F'(s, z)} = \frac{\psi_1(S, Z) . dZ}{\Psi'(S, Z)}, \quad \frac{\varphi_2(s, z) . dz}{F'(s, z)} = \frac{\varphi_2(S, Z) . dZ}{\Psi'(S, Z)},$$

und aus diesen ergiebt sich durch Division:

$$1°) \qquad \frac{\varphi_1(s, z)}{\varphi_2(s, z)} = \frac{\psi_1(S, Z)}{\psi_2(S, Z)}, \text{ w. z. b. w.}$$

Der eben bewiesene Satz ermöglicht es, jeder algebraischen Grundgleichung $F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right) = 0$ vom Geschlechte $p \geqq 3$ eine invariante Form zu erteilen, d. h. eine Form, die bei jeder weiteren birationalen Transformation unverändert bleibt. Ist nämlich $p \geqq 3$, so sind die zwei φ-Quotienten

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \quad \frac{\varphi_2}{\varphi_3},$$

wenn $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ linear unabhängig sind und zwischen ihnen keine identische Beziehung besteht (was nur im sogenannten hyperelliptischen Falle möglich ist), gegeneinander irreducibele Funktionen der Klasse von der Ordnung $2p - 2$. Das Gleichungssystem

$$2°) \qquad S = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \quad Z = \frac{\varphi_2}{\varphi_3},$$

definiert dann eine birationale Transformation, welche die Grundgleichung $F\binom{n\ m}{s, z} = 0$ in eine Gleichung von der Form

3°) $$\varphi\left(\overset{2p-2}{S}, \overset{2p-2}{Z}\right) = 0^{*})$$

überführt. Die Anzahl r der Doppelpunkte dieser Gleichung läßt sich leicht bestimmen. Nach Satz IV°) § 5 ist nämlich die Diskriminante D von 3°) bis auf einen von $S_1 \ldots S_{2p-2}$ unabhängigen Faktor identisch mit dem Produkte:

$$\Pi = \varphi'(S_1) \cdot \varphi'(S_2) \ldots \varphi'(S_{2p-2}),$$

wo $S_1 \ldots S_{2p-2}$ die einem unbestimmten Z entsprechenden Wurzeln S von 3°) bedeuten. Die Anzahl der einfachen Wurzelkoinzidenzen von $\varphi = 0$ ist daher gleich der Ordnung, zu welcher das Produkt Π für $Z = \infty$ unendlich wird. Nun wird aber für $Z = \infty$, d. h. für $\varphi_3 = 0$, auch $S = \infty$, und daher, da $\varphi'(S)$ in S vom Grade $2p - 3$ ist, jeder Faktor von Π gleich ∞^{2p-3}. Die Anzahl der Wurzelkoinzidenzen von 3°) ist folglich gleich $(2p-2)(2p-3)$.

Bezeichnen nun, wie früher, v die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte, r die der Doppelpunkte von 3°), so bestehen die Beziehungen:

$$(2p-2)(2p-3) = v + 2r,$$
$$v = 2(2p - 2 + p - 1),$$

aus denen sich unmittelbar

4°) $$r = 2(p-1)(p-3)$$

ergiebt.

Führt man nun noch an Stelle von S und Z mit Hilfe der Gleichungen:

$$S = \frac{x}{z}, \quad Z = \frac{y}{z},$$

die neuen Variabelen x, y, z ein, so geht 3°) nach Multiplikation mit z^{2p-2} in die homogene Gleichung

5°) $$\varphi\left(\overbrace{x, y, z}^{2p-2}\right) = 0$$

mit den drei Variabelen x, y, z über.**)

---

*) Riemann, Ges. W. pag. 458.
**) Riemann, Ges. W. pag. 459.

Nimmt man die im Vorigen benutzten Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ nicht mehr beliebig, sondern in geeigneter Weise an, so läfst sich der Grad der transformierten Gleichung $\psi = 0$ noch weiter erniedrigen. Nimmt man nämlich in T $p-3$ wesentliche, nicht von einander abhängige Punkte $\gamma_1 \dots \gamma_{p-3}$ an, und schreibt man dem allgemeinen Integranden I. Gattung diese Punkte als Nullpunkte erster Ordnung vor, so giebt es noch

$$\lambda + 1 = p - 1 - (p-3) + 1 = 3$$

linear unabhängige Integranden I. Gattung, also auch drei linear unabhängige φ-Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, die in diesen $p-3$ Punkten verschwinden. Bildet man mit Hilfe dieser φ-Funktionen die birationale Transformation:

$$S = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \quad Z = \frac{\varphi_2}{\varphi_3},$$

so sind S und Z Funktionen der Klasse (I. Gattung) von der gemeinsamen Ordnung:

$$2p - 2 - (p-3) = p + 1.$$

Dies giebt den

Satz II⁰) Die Gleichung $F\binom{n\ m}{s, z} = 0$ vom Geschlecht p geht durch die birationale Transformation

$$S = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \quad Z = \frac{\varphi_2}{\varphi_3},$$

worin $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ linear unabhängige φ-Funktionen bezeichnen, die $p-3$ beliebig in T angenommene Punkte zu gemeinschaftlichen Nullpunkten besitzen, über in eine Gleichung von der Form

$$6^0) \qquad \psi\binom{p+1\ \ p+1}{S,\ \ Z} = 0.^{*)}$$

Die Anzahl r der Doppelpunkte dieser Gleichung ergiebt sich aus den Beziehungen:

$$p(p+1) = v + 2r,$$
$$v = 2(p + 1 + p - 1).$$

*) Clebsch u. Gordan, Theorie d. Abel'schen Funktionen, pag. 65.

Es ist:

$$r = \frac{1}{2} p(p-3). \tag{7°}$$

Die Herren Brill und Nöther haben gezeigt, dafs die im Vorigen abgeleitete Normalgleichung 6°) von Clebsch und Gordan nicht die Normalgleichung von möglichst niedrigem Grade ist, die sich für $p \overline{>} 3$ erreichen läfst. Für die Normalgleichung niedrigsten Grades vergleiche Brill und Nöther; Math. Annalen Bd. VIII oder die Darstellung von A. Picard: Traité d'analyse. T. II, pag. 451 ff.

Die Zurückführung der Gleichung $F\binom{n\ m}{s, z} = 0$ des Geschlechts p auf eine Gleichung vom Grade $p+1$ beruht wesentlich darauf, dafs die Transformation

$$S = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \quad S = \frac{\varphi_2}{\varphi_3}$$

im allgemeinen birational ist. Es giebt jedoch einen Ausnahmefall. Bevor wir diesen besprechen, wollen wir noch mit Hilfe der transformierten Gleichung 6°), die bereits früher gefundene Zahl $3p-3$ der Moduln der Klasse einer allgemeinen Gleichung des Geschlechtes p bestätigen.

Die Normalgleichung 6°) hängt von

$$\frac{1}{2}(p+1)(p+4)$$

Parametern ab und besitzt, wie oben bewiesen $\frac{1}{2} p(p-3)$ Doppelpunkte, in deren jedem

$$\Psi'(S, Z) = 0$$

ist. Dies liefert $\frac{1}{2} p(p-3)$ Bedingungsgleichungen zwischen den Parametern von Ψ. Die Anzahl der willkürlichen Koeffizienten beträgt also noch

$$\frac{1}{2}[(p+1)(p+4) - p(p-3)] = 4p+2.$$

Andererseits hängt die birationale Transformation, durch welche $F = 0$ in $\Psi = 0$ umgeformt wird, von $p-3$ von einander unabhängigen willkürlichen Punkten ab; diese

$p-3$ Punkte kann man sich so angenommen denken, dafs von vornherein $p-3$ Koeffizienten von Ψ gegebene Werte annehmen. Wendet man dann noch auf 6°) die allgemeinste homographische Transformation

$$s = \frac{\alpha Z + \beta S + \gamma}{\alpha_2 Z + \beta_2 S + \gamma_2}, \quad z = \frac{\alpha_1 Z + \beta_1 S + \gamma_1}{\alpha_2 Z + \beta_2 S + \gamma_2}.$$

die von 8 willkürlichen Parametern abhängt, so lassen sich weitere 8 Koeffizienten von $\Psi = 0$ so bestimmen, dafs sie gegebene Werte annehmen. Die Anzahl der in 6°) willkürlich bleibenden Parameter ist daher schliefslich:

$$4p + 2 - (p-3) - 8 = 3p - 3, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

In enger Beziehung mit der in diesem Paragraphen entwickelten Theorie steht eine Frage, die wir noch in kurzen Worten besprechen wollen.*)

Es seien

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_p$$

p linear unabhängige Funktionen, d. h. die Zähler von p linear unabhängigen Integranden I. Gattung. Bildet man aus denselben ganze homogene Funktionen zweiten Grades:

$$8°) \qquad F_0(\varphi_1 \dots \varphi_p),\ F_1(\varphi_1 \dots \varphi_p),\ F_2(\varphi_1 \dots \varphi_p), \dots$$

so sind die Quotienten

$$9°) \qquad \frac{F_1}{F_0},\ \frac{F_2}{F_0}, \dots$$

Funktionen der Klasse, die in denselben $q = 4p - 4$ Punkten $\gamma_1 \dots \gamma_\varrho \dots \gamma_{4p-4}$ der Fläche T zur ersten Ordnung unendlich werden, und daher Funktionen II. Gattung sind. Bedeutet nun $\varkappa$ den Überschufs des Punktsystems $\gamma_1 \dots \gamma_{4p-4}$, so ist

$$q - \varkappa = p,$$

d. h.

$$\varkappa = 3p - 4.$$

Nach dem Riemann-Roch'schen Satze enthält daher die allgemeinste Funktion der Klasse, welche die Punkte $\gamma_1 \dots \gamma_{4p-4}$ zu Unstetigkeitspunkten besitzt, noch genau

$$\varkappa + 1 = 3p - 3$$

*) H. Weber, Math. Ann. Bd. XIII.

verfügbare Konstanten, von denen eine additiv ist. Jeder der Quotienten 9°) läfst sich somit durch $3p-4$ derselben linear ausdrücken, oder: zwischen je $3p-2$ der Funktionen 8) besteht eine lineare und homogene Gleichung mit konstanten Koeffizienten. Nimmt man speziell für F_0, F_1, F_2 die $\frac{1}{2}p(p+1)$ Funktionen:

10°) $$\varphi_1^2, \varphi_1 \cdot \varphi_2, \cdots \varphi_{p-1}\varphi_p, \varphi_p^2,$$

so erhält man den

Satz III°) Zwischen p linearunabhängigen φ-Funktionen $\varphi_1 \ldots \varphi_p$ bestehen stets

$$\frac{1}{2}p(p+1)-(3p-3)=\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$$

homogene Gleichungen zweiten Grades.

In besonderen Fällen kann es mehr solcher Gleichungen geben; der vorige Satz, der übrigens nur ein Spezialfall eines allgemeinen Satzes ist (siehe etwa H. Stahl, Theorie der Abel'schen Funktionen pag. 183), giebt daher nur eine untere Grenze.

Beispiel: Es sei $p=3$. Für diesen Fall ist

$$\frac{1}{2}(p-2)(p-3)=0,$$

was sich auch folgenderweise bestätigen läfst. — Bestünde zwischen den drei linear unabhängigen Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ eine homogene Gleichung zweiten Grades, so könnte man dieselbe auf die Form

$$\varphi_1 \varphi_2 = \varphi_3^2,$$

oder $$\frac{\varphi_2}{\varphi_1}=\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_1}\right)^2$$

bringen. Da aber $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ höchstens in je vier Punkten $=0^1$ und ∞^1 werden kann, so könnte $\frac{\varphi_3}{\varphi_1}$ nur in je zwei Punkten 0^1 und ∞^1 werden. Es wird also eine Funktion der Klasse von der Ordnung 2 existieren, was, wie wir sehen werden,

den hyperelliptischen Fall charakterisiert und bei unbeschränkten Moduln der Klasse unmöglich ist.

Dagegen läfst sich im allgemeinen Falle $p = 3$ eine homogene Gleichung vierten Grades zwischen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ nachweisen. Bezeichnet man nämlich (siehe H. Weber, Theorie der Abel'schen Funktionen vom Geschlechte $p = 3$, pag. 51) mit q, r, s, t; q_1, r_1, s_1, t_1 irgend vier der drei Zahlen 1, 2, 3, so ist der Quotient:

$$Z = \frac{\varphi_q \cdot \varphi_r \cdot \varphi_s \cdot \varphi_t}{\varphi_{q_1} \cdot \varphi_{r_1} \cdot \varphi_{s_1} \cdot \varphi_{t_1}}$$

eine Funktion der Klasse von der Ordnung 16, die nach dem Riemann-Roch'schen Satz als lineare Funktion von 13 speziellen Funktionen derselben Art mit gleichen Unstetigkeitsstellen wie Z dargestellt werden kann. Behält man den Nenner $\varphi_{q_1} \cdot \varphi_{r_1} \cdot \varphi_{s_1} \cdot \varphi_{t_1}$ bei, so lassen sich aber 14 solcher Funktionen Z herstellen, so dafs zwischen denselben eine lineare Relation bestehen mufs, die nach Weghebung des gemeinsamen Nenners in eine homogene Gleichung vierten Grades zwischen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ übergeht. — Diese Gleichung kann ebenso gut, wie die Grundgleichung $F\begin{pmatrix} n & m \\ s, & z \end{pmatrix} = 0$, als definierende Gleichung der Klasse angesehen werden; dividiert man sie nämlich durch φ_3^4, so geht sie in die Gleichung 3°) dieses Paragraphen über, welche durch die birationale Transformation

$$S = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \quad Z = \frac{\varphi_2}{\varphi_3}$$

aus der Grundgleichung $F = 0$ hervorgeht.

Im allgemeinen Falle $p = 4$ giebt es zwischen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ eine homogene Gleichung zweiten Grades und eine solche dritten Grades. Beide zusammen sind äquivalent mit der einen Gleichung 3°) dieses Paragraphen, vom Grade 6, die durch die birationale Transformation

$$S = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \quad Z = \frac{\varphi_2}{\varphi_3}$$

aus der Grundgleichung $F = 0$ hervorgeht, und bestimmen also vollständig eine Klasse algebraischer Funktionen vom Geschlechte $p = 4$.

Im Falle $p = 5$ giebt es drei homogene Gleichungen zweiten Grades zwischen den fünf linear unabhängigen φ-Funktionen, und diese Gleichungen sind umgekehrt im allgemeinen ausreichend zur Defintion der Funktionenklasse vom Geschlechte $p = 5$. Für den Beweis siehe die schon erwähnte Abhandlung von Herrn H. Weber, wo auch auf den Umstand hingewiesen wird, dafs durch die Darstellung der algebraischen Funktionen durch die Gesamtheit der Beziehungen zwischen den φ-Funktionen die Frage nach den Moduln der Klasse einer Behandlung mit den Hilfsmitteln der gewöhnlichen Invariantentheorie zugänglich wird.

§ 38. Der hyperelliptische Fall.

Im vorigen Paragraphen ist gesagt worden, dafs die Transformation

$$1^0) \qquad S = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \quad Z = \frac{\varphi_2}{\varphi_3},$$

worin $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ spezielle φ-Funktionen bedeuten, die aufser den Doppelpunkten von T noch weitere $p-3$ wesentliche, gemeinsame Nullpunkte besitzen, nicht immer birational ist. Wir wollen diese Möglichkeit näher untersuchen.

Soll die Transformation 1⁰) nicht birational sein, so müssen j e d e m Punkte (S, Z) der zur transformierten Gleichung gehörigen Fläche T_1 mindestens zwei Punkte (s, z) der zur ursprünglichen Gleichung $F = 0$ gehörigen Fläche T entsprechen. Mit andern Worten: für j e d e s konstante Wertepaar S, Z mufs es, wenn σ_1, ζ_1 eine Wertepaar (s, z) bezeichnet, das die Gleichungen

$$S \cdot \varphi_3(\sigma_1, \zeta_1) - \varphi_1(\sigma_1, \zeta_1) = 0,$$
$$Z \cdot \varphi_3(\sigma_1, \zeta_1) - \varphi_2(\sigma_1, \zeta_1) = 0$$

befriedigt, mindestens e i n zweites Wertepaar σ_2, ζ_2 von s, z geben, für das diese Gleichungen ebenfalls erfüllt sind, oder auch: Wenn wir den 2 φ-Funktionen

$$2^0) \qquad \begin{cases} S \cdot \varphi_3 - \varphi_1, \\ Z \cdot \varphi_3 - \varphi_2 \end{cases}$$

aufser den Doppelpunkten und den schon vorhandenen $p-3$ gemeinsamen Nullpunkten noch einen weiteren gemeinsamen Nullpunkt in T vorschreiben, so müssen sie sofort noch mindestens einen ferneren Nullpunkt gemein haben.

Die drei φ-Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sind, da die $p-3$ denselben zuerst vorgeschriebenen Nullpunkte von einander unabhängig sind, linear unabhängig. Ein weiterer Nullpunkt von

$$S \cdot \varphi_3 - \varphi_1,$$

wo S eine beliebige Konstante ist, mufs also gemeinsamer Nullpunkt von φ_1 und φ_3 sein, und wenn dieser Punkt auch ein Nullpunkt von

$$Z \cdot \varphi_3 - \varphi_2$$

sein soll, auch ein gemeinsamer Nullpunkt von φ_3 und φ_2, d. h. schreibt man den 2 φ-Funktionen 2º) aufser den Doppelpunkten und den $p-3$ gemeinsamen Nullpunkten $\gamma_1 \ldots \gamma_{p-3}$ noch einen weiteren gemeinsamen Nullpunkt γ_{p-2} vor, so mufs derselbe ein gemeinsamer Nullpunkt von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sein. Die Transformation 1º) ist daher dann und nur dann nicht birational, wenn ein beliebiger, gemeinsamer Nullpunkt von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sogleich mindestens einen weiteren gemeinsamen Nullpunkt derselben Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ nach sich zieht.

Wir können dies auch wie folgt ausdrücken: Die Transformation 1º) ist dann und nur dann nicht birational, wenn die $p-3$ Gleichungen

$$w'(\gamma_1) = 0, \ldots w'(\gamma_{p-3}) = 0,$$

welche ausdrücken, dafs der allgemeine Integrand I. Gattung w' in den $p-3$ von einander unabhängigen Punkten $\gamma_1 \ldots \gamma_{p-3}$ verschwindet, zusammen mit einer anderen Gleichung:

$$w'(\gamma_{p-2}) = 0,$$

wo γ_{p-2} einen beliebigen weiteren Punkt von T bezeichnet, sogleich mindestens eine weitere Gleichung:

$$w'(\gamma) = 0$$

nach sich ziehen.

Wir nehmen nun zunächst an, das Verschwinden des allgemeinen Integranden I. Gattung w' in $p-2$ von ein-

ander unabhängigen Punkten $\gamma_1 \ldots \gamma_{p-2}$ ziehe das Verschwinden von w' in nur einem weiteren Punkte γ nach sich. In diesem Falle müssen die Koordinaten α, β von γ von den Koordinaten α_i, β_i aller Punkte γ_i $(i = 1 \ldots p-2)$ abhängen. Denn hingen sie von den Koordinaten von nur μ $(< p-2)$ Punkten ab, so würde der Integrand w', der in $\gamma_1 \ldots \gamma_{p-2}$ verschwindet, gegen die Voraussetzung in mehr als einem weiteren Punkte, nämlich in

$$(p-2)_\mu = \frac{(p-2)(p-3)\ldots(p-\mu-1)}{1\ldots\mu}$$

weiteren Punkten verschwinden. Es ist daher:

$$3^\circ)\qquad \begin{cases} \alpha = R_1(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots \alpha_{p-2}, \beta_{p-2}), \\ \beta = R_2(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots \alpha_{p-2}, \beta_{p-2}), \end{cases}$$

wo R_1, R_2 rationale Funktionen der Koordinaten α_i, β_i bezeichnen. — Ebenso müssen umgekehrt die Beziehungen:

$$4^\circ)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = P_1(\alpha\beta, \alpha_2\beta_2, \ldots \alpha_{p-2}\beta_{p-2}), \\ \beta_1 = P_2(\alpha\beta, \alpha_2\beta_2, \ldots \alpha_{p-2}\beta_{p-2}) \end{cases}$$

bestehen, wo P_1, P_2 wieder rationale Funktionen der im Argumente auftretenden Koordinaten bedeuten. — Sieht man $\alpha_2\beta_2, \ldots \alpha_{p-2}\beta_{p-2}$ als willkürliche Parameter an, so giebt es, wie die Beziehungen 3°) und 4°) zeigen, eine birationale Transformation mit willkürlichen Parametern zwischen

$$\alpha, \beta \text{ und } \alpha_1, \beta_1,$$

dies ist aber für $p > 1$ unmöglich. — Die Annahme, dafs das Verschwinden von w' in $p-2$ beliebigen Punkten das Verschwinden desselben Integranden in nur einem weiteren Punkte nach sich ziehe, führt also auf einen Widerspruch mit Früherem.

Angenommen nun, das Erfülltsein der $p-2$ wesentlichen Gleichungen

$$w'(\gamma_1) = 0, \ldots w'(\gamma_{p-2}) = 0$$

ziehe das Erfülltsein von weiteren $\varkappa$ (> 1) Gleichungen:

$$w'(\gamma_1') = 0, \ldots w'(\gamma_\varkappa') = 0$$

nach sich.

Das Punktsystem

5°) $$\gamma_1 \dots \gamma_{p-2},\ \gamma'_1 \dots \gamma'_\varkappa$$

ist dann ein Punktsystem I. Gattung mit dem Überschufs $\varkappa$, und es gilt daher für dasselbe die Beziehung:

$$q - \varkappa = p - \lambda - 1,$$

wo
$$q - \varkappa = p - 2,$$

und daher
$$\lambda = 1$$
ist.

Das zum Punktsystem 5°) komplementäre Punktsystem ist also ebenfalls ein Punktsystem I. Gattung und sein Überschufs $\varkappa'$ ist $= 1$. Die Ordnung $q' = 2p - 2 - q$ dieses Systems ist folglich mindestens $= 2$, d. h. der Überschufs $\varkappa$ des Systems 5°) ist höchstens $= p - 2$. Es wird sich gleich ergeben, dafs $\varkappa$ thatsächlich gleich $p - 2$ ist.

Die $\varkappa$ Punkte $\gamma'_1 \dots \gamma'_\varkappa$ können in ihrer Lage nicht alle zugleich von der Lage aller Punkte $\gamma_1 \dots \gamma_{p-2}$ abhängen. Denken wir uns nämlich zu den Punkten $\gamma_1 \dots \gamma_{p-2}$ noch einen weiteren Punkt γ_{p-1} hinzugenommen, so dafs die Gleichungen

6°) $$w'(\gamma_1) = 0, \dots w'(\gamma_{p-2}) = 0,\ w(\gamma_{p-1}) = 0$$

alle von einander unabhängig sind, so ist dadurch w' vollkommen bestimmt bis auf einen konstanten Faktor. Die übrigen Nullpunkte von w', $p - 1$ an der Zahl, sind also auch bestimmt. Je $p - 2$ der Gleichungen 6°) ziehen aber, nach unserer Annahme, das Verschwinden von w' in $\varkappa$ weiteren Punkten nach sich. Die Gleichungen 6°) in ihrer Gesamtheit ziehen also $\varkappa(p - 1)$ weitere Nullpunkte von w' nach sich, und diese Nullpunkte müssen alle von einander verschieden sein, wenn je $\varkappa$ einer Gruppe von $p - 2$ Gleichungen 6°) entsprechende Nullpunkte sämtlich von allen diesen $p - 2$ Gleichungen abhängen. Der Integrand w' hätte dann im Endlichen

$$p - 1 + \varkappa(p - 1)$$

von einander verschiedene Nullpunkte, was unmöglich ist, da $\varkappa > 1$.

Die $\varkappa$ Punkte $\gamma'_1 \dots \gamma'_\varkappa$ zerfallen daher in Gruppen von ν Punkten, die von der Lage von nur $\mu\ (< p - 2)$ Punkten

aus der Reihe $\gamma_1 \ldots \gamma_{p-2}$ abhängen, d. h. der allgemeine Integrand w', der in $\mu\,(< p-2)$ von den Punkten $\gamma_1 \ldots \gamma_{p-2}$ verschwindet, mufs noch in weiteren ν Punkten γ' verschwinden, die alle von den sämtlichen ersten μ Punkten abhängen. Durch Betrachtungen, die den eben angestellten ganz analog sind, ergiebt sich nun, dafs der Integrand w' im Endlichen im ganzen

$$p-1+\nu\,.\,\frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-\mu)}{1\,.\,2\ldots\mu}$$

von einander verschiedene Nullpunkte haben müfste. Diese Anzahl mufs aber andererseits $= 2p-2$ sein; es mufs daher die Gleichheit

$$7^0)\qquad p-1+\nu\,.\,\frac{(p-1)\ldots(p-\mu)}{1\,.\,2\ldots\mu}=2p-2$$

bestehen, und dies ist nur möglich, wenn

$$8^0)\qquad \mu=\nu=1^{*)}$$

ist. Wir haben so den

Satz I^0) Die Transformation 1^0) ist dann und nur dann nicht birational, wenn das Verschwinden des allgemeinen Integranden I. Gattung w' in einem beliebigen Punkte γ von T das Verschwinden von w' in **einem** weiteren Punkte γ' von T nach sich zieht.

Wenn der allgemeine Integrand I. Gattung w', der zu einer Grundgleichung $F\binom{n\;\;m}{s,\,z}=0$ gehört, die im vorigen Satze ausgesprochene, ausgezeichnete Eigenschaft besitzt, dann sagt man: $F\binom{n\;\;m}{s,\,z}=0$ definiert eine Klasse hyperelliptischer Funktionen, sie gehört dem hyperelliptischen Falle an.

Im hyperelliptischen Fall ist also die Zurückführung der Grundgleichung $F=0$ auf die Clebsch-Gordan'sche Normalgleichung vom Grade $p+1$ unmöglich.

---

*) Picard, Traité d'Analyse, T. III, pag. 445 ff.

Die im Vorigen gegebene Definition des hyperelliptischen Falls, die auch noch für $p=2$ gilt, läfst sich noch in andere Form bringen. Es sei α_1 ein Punkt von T, in dem der allgemeine Integrand w' verschwindet, α_2 der Punkt, in dem w' infolgedessen von selbst verschwindet. Das Gleichungssystem

9°) $$w'(\alpha_1)=0,\ w'(\alpha_2)=0$$

enthält dann eine überzählige Gleichung, und das Punktsystem α_1, α_2 ist daher (siehe Satz III°), § 29) ein Punktsystem der Klasse. Es giebt somit eine Funktion τ der Klasse von der Ordnung $q=2$, den Unstetigkeitspunkten α_1, α_2 und dem Überschufs $\varkappa=1$. Beschränken wir uns weiter auf den Fall $p \overline{>} 2$, und das sei von hier an stets vorausgesetzt, so folgt aus $q-\varkappa=1$:

10°) $$q-\varkappa < p-1;$$

das Punktsystem α_1, α_2 ist daher ein Punktsystem I. Gattung, und die in α_1, α_2 unendlich werdende Funktion τ der Klasse eine Funktion I. Gattung, die sich darstellen läfst in der Form:

11°) $$\tau=\frac{w_1'}{w_2'}=\frac{\varphi_1}{\varphi_2}.$$

Berücksichtigt man aufserdem, dafs für diese Funktion

$$q-\varkappa=1=p-\lambda-1$$

ist, so ergiebt sich für den Defekt λ von τ der Wert:

12°) $$\lambda=p-2.$$

Es gilt daher der

Satz II°) Im hyperelliptischen Falle existiert, für $p \overline{>} 2$, stets eine Funktion τ I. Gattung der Klasse von der Ordnung $q=2$, und der allgemeine Integrand I. Gattung (die allg. φ-Funktion), der in den Unstetigkeitspunkten $\alpha_1\,\alpha_2$ dieser Funktion $=o^1$ wird, reduziert sich auf eine lineare Funktion von $p-1$ linear unabhängigen Integranden I. Gattung ($p-1$ φ-Funktionen), die alle in den Punkten α_1, α_2 verschwinden.

Dieser Satz läfst sich umkehren:

Satz III°) Giebt es für $p > 2$ eine Funktion τ I. Gattung der Klasse von der Ordnung $q = 2$, so bestimmt jeder Punkt α_1 der Riemann'schen Fläche T **einen** weiteren Punkt α_2 derselben. Diese Bestimmung ist dadurch festgelegt, dafs das Verschwinden des allgemeinen Integranden w' in α_1 das Verschwinden desselben Integranden in α_2 nach sich zieht, oder, mit anderen Worten, dafs jede ganze lineare Funktion von $p-1$ linear unabhängigen Integranden I. Gattung, die in α_1 verschwindet, auch in α_2 gleich Null wird.

Beweis: Ist, für $p > 2$, τ eine Funktion der Klasse mit den Unstetigkeitspunkten β_1, β_2, so ist τ eine Funktion I. Gattung. Bedeutet ferner $\tau(\alpha_1)$ den Wert von τ in einem beliebigen Punkte α_1 von T, so ist

$$\sigma = \frac{\tau - C}{\tau - \tau(\alpha_1)},$$

wo C eine von $\tau(\alpha_1)$ verschiedene Konstante bedeutet, ebenfalls eine Funktion I. Gattung der Klasse von der Ordnung $q = 2$. Diese Funktion wird unstetig in α_1 und in einem weiteren Punkte α_2, der dadurch bestimmt ist, dafs die Gleichung $w'(\alpha_1) = 0$ die Gleichung $w'(\alpha_2) = 0$ nach sich zieht. — Berücksichtigt man aufserdem, dafs der Defekt λ des Punktsystems α_1, α_2 gleich $p - 2$ ist, so läfst sich auch sagen, dafs der Punkt α_2 dadurch bestimmt ist, dafs jedes Aggregat:

$$c_1 w'_1 + c_2 w'_2 + \dots + c_{p-1} w'_{p-1},$$

oder

$$c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_{p-1} \varphi_{p-1},$$

das in α_1 verschwindet, auch in α_2 gleich Null wird, w. z. b. w.

Aus Satz II°) und III°) folgt:

Für $p \geqq 2$ läfst sich der hyperelliptische Fall entweder definieren durch die Existenz einer Funktion τ der Klasse von der Ordnung $q = 2$, oder dadurch, dafs das Nullwerden des

allgemeinen Integranden I. Gattung w' in einem beliebigen Punkte α_1 von T das Verschwinden von w' in **einem** weiteren Punkte α_2 von T nach sich zieht.

Im folgenden Paragraphen soll gezeigt werden, wie sich aus der Existenz einer Funktion τ der Klasse von der Ordnung $q = 2$ eine für die Anwendung besonders bequeme Form der definierenden Grundgleichung eine Klasse hyperelliptischer Funktionen des Geschlechtes $p \geqq 2$ ableiten läfst.

---

§ 39. Normalform der Grundgleichung im hyperelliptischen Falle.

Es sei

$$\psi\left(\overset{n-1}{s}, \overset{m-1}{z}\right) \tag{1}$$

eine ganze rationale Funktion von den angeschriebenen Graden $n-1$, $m-1$ in den durch die hyperelliptische Grundgleichung $F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right) = 0$ vom Geschlechte p verbundenen Variabelen s und z. Diese Funktion ψ, in der $m\,n$ verfügbare, konstante Koeffizienten vorkommen, enthält, wenn man ihr die $2r$ Doppelpunkte von T als Nullpunkte aufprägt, noch

$$mn - r = (m-1)(n-1) - r + m + n - 1 = p + m + n - 1$$

verfügbare Konstanten und besitzt aufser den $2r$ Doppelpunkten noch

$$\begin{aligned} m(n-1) + n(m-1) - 2r &= 2(m-1)(n-1) - 2r + m + n - 2 \\ &= 2p - 2 + m + n \end{aligned}$$

weitere Nullpunkte. Schreibt man ψ, aufser den Doppelpunkten, noch

$$p + m + n - 3$$

beliebige andere Nullpunkte vor, so besitzt diese Funktion noch $p+1$ Nullpunkte, während die Anzahl der in ihr noch enthaltenen verfügbaren Konstanten

$$p + m + n - 1 - (p + m + n - 3) = 2$$

beträgt. Die Funktion ψ mit diesen $2r + p + m + n - 3$ Nullpunkten läfst sich also darstellen in der Form:

$$2^{\circ}) \qquad \Psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2,$$

wo ψ_1, ψ_2 zwei spezielle ganze, rationale Funktionen von s und z bezeichnen, die in s und z von den Graden $n - 1$ und $m - 1$ sind, und aufser den Doppelpunkten noch weitere $p + m + n - 3$ gemeinsame Nullpunkte haben.

Der Quotient

$$3^{\circ}) \qquad S = \frac{\psi_1}{\psi_2}$$

ist dann eine Funktion der Klasse von der Ordnung $p + 1$. Nimmt man hierzu noch die nach Voraussetzung existierende Funktion der Klasse von der Ordnung 2, die sich als Funktion I. Gattung in der Form:

$$4^{\circ}) \qquad Z = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$$

darstellen läfst, so besteht zwischen S und Z eine algebraische Gleichung

$$\Phi\left(\overset{2}{S}, \overset{p+1}{Z}\right) = 0,$$

oder

$$5^{\circ}) \qquad S^2 . K + S . L + M = 0,$$

wo K, L, M ganze Funktionen von Z vom Grade $p + 1$ sind. Denken wir uns ferner die Funktion ψ_1 so bestimmt, dafs ψ_1 in dem einen der zwei Nullpunkte von Z gleich 0^1 wird, in dem andern aber nicht, so entsprechen dem Werte $Z = 0$ zwei verschiedene Werte von S, und die Gleichung 5°) ist dann irreducibel (Satz II°), § 13). Setzt man nun noch

$$\sigma = 2 S K + L,$$

so geht 5°) über in

$$\sigma^2 = L^2 - 4 K . M.$$

Schreibt man hierin für σ und Z wieder s und z, und bezeichnet man die $2p + 2$ Nullpunkte der Gleichung:

$$L^2 - 4 K . M = 0$$

mit

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2p+1},$$

so nimmt 5°) die Form an:

$$6^{0})\quad s^2 = (z-\alpha)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_{2p-1}).$$

Unsere späteren Betrachtungen über die hyperelliptischen Funktionen (siehe Thetafunktionen und hyperelliptische Funktionen) schliefsen sich sämtlich an diese Normalform der Grundgleichung an.

Die durch 6°) definierte algebraische Funktion s der Klasse besitzt Verzweigungspunkte für $z = \alpha, \dots \alpha_{2p+1}$, und zwar sind diese Verzweigungspunkte alle einfach. Da ferner die durch 6°) definierte Funktionenklasse als vom Geschlechte p vorausgesetzt war, so müssen die Werte $z = \alpha, \alpha_1 \dots \alpha_{2p+1}$ alle von einander verschieden sein. Wäre nämlich z. B. $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta$, so hätte man

$$s = (z-\beta) \,.\, \sqrt{(z-\alpha)(z-\alpha_3)\dots(z-\alpha_{2p+1})},$$

und die Funktion s besäfse dann nur noch $v = 2p$ einfache Verzweigungspunkte, während doch, nach Früherem,

$$v = 2p + 2n - 2$$

sein mufs.

Mit Hilfe der Normalform 6°) der Grundgleichung läfst sich die Anzahl der Moduln einer Klasse hyperelliptischer Funktionen vom Geschlechte p ohne Schwierigkeit bestimmen.

Die Gleichung 6°) enthält $2p+2$ Konstanten, nämlich die Gröfsen $\alpha, \alpha_1 \dots \alpha_{2p+1}$. Wendet man auf 6°) eine lineare Substitution

$$\zeta = \frac{\beta z + \gamma}{z + \delta}$$

an, so läfst sich über die willkürlichen Gröfsen β, γ, δ so verfügen, dafs die Gleichung 6°) eine Form annimmt, in der nur mehr $2p-1$ willkürliche Konstanten auftreten. Setzt man z. B.:

$$\frac{z-\alpha}{z-\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha} = \frac{\zeta}{\zeta-1},$$

und ferner:

$$\sigma = C \cdot \frac{s}{(z-\alpha_2)^{p+1}},$$

worin

$$C = \frac{(\alpha_2 - \alpha)^p (\alpha_2 - \alpha_1)^p}{\sqrt{(\alpha - \alpha_1)^{2p+1} (\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4) \ldots (\alpha_2 - \alpha_{2p+1})}}$$

ist, so geht 6°) über in

$$7^0)\quad \sigma^2 = \zeta (\zeta - 1)(\zeta - \beta_3)(\zeta - \beta_3) \ldots (\zeta - \beta_{2p+1}),$$

wo allgemein

$$8^0)\quad \beta_\varrho = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_\varrho - \alpha)}{(\alpha - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_\varrho)} \quad \text{ist, für } \varrho = 3, \ldots 2p + 1.$$

Die der Gleichung 7°) entsprechende Riemann'sche Fläche T hat drei festliegende Verzweigungspunkte, nämlich in den Punkten $\zeta = 0, 1, \infty$. Die übrigen Verzweigungspunkte liegen an Stellen, die durch die verfügbar bleibenden Parameter β_ϱ von 7°) bestimmt sind. Es gilt daher der

Satz IV°) Die hyperelliptische Fläche T vom Geschlechte p hängt nur von $2p - 1$ Klassenmoduln ab. Zwischen den $3p - 3$ Moduln der Klasse, von denen eine allgemeine Fläche T vom Geschlechte p abhängt, müssen also im hyperelliptischen Falle $3p - 3 - (2p - 1) = p - 2$ Beziehungen bestehen.

Im Falle $p = 2$ ist die Zahl der im Endlichen gelegenen Nullpunkte des allgemeinen Integranden I. Gattung gleich $2p - 2 = 2$; in diesem Falle giebt es also immer eine Funktion der Klasse von der Ordnung 2, d. h. der Fall $p = 2$ (für den $3p - 3 = 2p - 1 = 3$ ist) zählt stets zu den hyperelliptischen. Ebenso auch der Fall $p = 1$, den wir bisher durchweg ausgeschlossen haben. Dieser letztere Fall ist aber noch insofern von speziellerer Natur, als jede Fläche T vom Geschlecht $p = 1$ eine eindeutige Transformation in sich selbst zuläfst, die einen willkürlichen Parameter enthält.

Beispiel.*) Es soll bewiesen werden, dafs die der Gleichung

$$s^6 = z(z - \alpha)(z - \beta)^4$$

*) Baker: Abelian Functions, pag. 88, 89.

zugehörige Riemann'sche Fläche vom Geschlechte $p = 2$ ist, dafs die Funktion

$$\zeta = \frac{z - \beta}{s}$$

eine Funktion der Klasse von der Ordnung 2 ist, und dafs, wenn man

$$\sigma = \frac{[z(\alpha - 2\beta) + \alpha\beta] \cdot (z - \beta)^2}{s^3}$$

setzt, die ursprüngliche Gleichung übergeht in

$$\sigma^2 = \alpha^2 (\zeta^6 - 1) + (\alpha - 2\beta)^2,$$

wo die sechs Verzweigungspunkte leicht bestimmt werden können.

Weitere Beispiele von Flächen vom Geschlechte $p = 2$ liefern die Gleichungen:

1°) $$s^8 = z(z - \alpha)^3 (z - \beta)^4,$$

2°) $$s^5 = z(z - \alpha)(z - \beta)^3,$$

3°) $$s^4 = z(z - \alpha)^2 (z - \beta)^2 (z - \gamma)^3.$$









